1. Seja o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, isto é, o conjunto de todos os números da forma $a + b\sqrt{5}$, onde a e b são números racionais.

   Nesse conjunto, define-se a soma e o produto de dois elementos $a + b\sqrt{5}$ e $c + d\sqrt{5}$ como:

$$(a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{5},$$

$$(a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}.$$

   Sabendo disso, responda as seguintes questões:

   (a) Efetue a soma $(2 + 4\sqrt{5}) + (19 + 28\sqrt{5})$ e o produto $(3 - 2\sqrt{5}) \cdot (3 + 2\sqrt{5})$, apresentando os resultados na forma $a + b\sqrt{5}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$.

Solução:

Utilizando a definição que foi dada para a soma, tem-se

$$(2 + 4\sqrt{5}) + (19 + 28\sqrt{5}) = (2 + 19 + (4 + 28)\sqrt{5}) = (21 + 32\sqrt{5}).$$

Para o produto, veja que este caso trata-se de um produto da soma pela diferença, então

$$(3 - 2\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5}) = (3^2 - (2\sqrt{5})^2) = 9 - 20 = -11.$$

Além disso, note que podemos representar -11 como um elemento de $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$:

$$-11 = -11 + 0\sqrt{5}.$$

   (b) Mostre que $\sqrt{11} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$

Solução:

Aqui, faremos uma prova por contradição. Suponha que $\sqrt{11} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, então existem $a, b \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\sqrt{11} = a + b\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{11} - a)^2 = (b\sqrt{5})^2 \Rightarrow 11 - 2a\sqrt{11} + a^2 = 5b^2 \Rightarrow 5b^2 - a^2 - 11 = -2a\sqrt{11}.$$

Logo,

$$\sqrt{11} = \frac{a^2 + 11 - 5b^2}{2a}.$$

Como $a, b \in \mathbb{Q}$, tem-se que $a^2 + 11 - 5b^2 \in \mathbb{Q}$, e claramente $2a \in \mathbb{Q}$. Como a razão de números racionais é um número racional, obtém-se que $\sqrt{11} \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição! Logo, $\sqrt{11}$ não pertence a $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, como queríamos mostrar.

(c) Dado um elemento $\alpha = a + b\sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, define-se seu *conjugado* como $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{5}$ e sua *norma* como

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha} = a^2 - 5b^2.$$

e sua norma. Mostre que

$$N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$$

Solução:

Antes de tudo, perceba que, se $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, então $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$. Com efeito, seja $\alpha = a + b\sqrt{5}$ e $\beta = c + d\sqrt{5}$, portanto $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{5}$ e $\overline{\beta} = c - d\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \overline{\alpha}\,\overline{\beta} = (ac - 5bd) - (ad + bc)\sqrt{5} = \overline{\alpha\beta}.$$

Será utilizado o resultado acima para provar o que se pede no exercício. Temos que

$$N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)\overline{\alpha\beta} = (\alpha\beta)\,\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = (\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta}) = N(\alpha)N(\beta),$$

justamente o que queríamos provar.

2. Faça o que se pede nos itens a seguir:

(a) Mostre que, para todo número real x, vale a seguinte identidade:

$$\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$$

Solução:

Lembre que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$ e $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

Calculemos agora $\cos(3x)$:

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(x)\cos(2x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)$$

Substituindo:

$$\cos(3x) = \cos(x)(2\cos^2(x) - 1) - \operatorname{sen}(x) \cdot 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

Colocando $\cos(x)$ em evidência:

$$\cos(3x) = \cos(x)\left[(2\cos^2(x) - 1) - 2\operatorname{sen}^2(x)\right]$$

Sabendo que $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, temos:

$$\cos(3x) = \cos(x)\left[(2\cos^2(x) - 1) - 2(1 - \cos^2(x))\right]$$

$$\cos(3x) = \cos(x)\left[2\cos^2(x) - 1 - 2 + 2\cos^2(x)\right] = \cos(x)(4\cos^2(x) - 3)$$

$$\Rightarrow \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

Vejamos agora $\operatorname{sen}(3x)$:

$$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(x + 2x) = \operatorname{sen}(x)\cos(2x) + \cos(x)\operatorname{sen}(2x)$$

Substituindo:

$$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(x)(2\cos^2(x) - 1) + \cos(x) \cdot 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

$$= \operatorname{sen}(x)\left[(2\cos^2(x) - 1) + 2\cos^2(x)\right] = \operatorname{sen}(x)(4\cos^2(x) - 1)$$

Finalmente, podemos calcular $\cos(5x)$, que podemos escrever como:

$$\cos(5x) = \cos(3x + 2x) = \cos(3x)\cos(2x) - \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(2x)$$

Substituindo o que obtivemos até aqui:

$$\cos(5x) = [\cos(x)(4\cos^2(x) - 3)](2\cos^2(x) - 1) - [\operatorname{sen}(x)(4\cos^2(x) - 1)](2\operatorname{sen}(x)\cos(x))$$

$$= \cos(x)(4\cos^2(x) - 3)(2\cos^2(x) - 1) - \operatorname{sen}(x)(4\cos^2(x) - 1) \cdot 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

$$= \cos(x)(8\cos^4(x) - 10\cos^2(x) + 3) - \cos(x)(8\cos^4(x) - 10\cos^2(x) + 2)$$

$$= 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x),$$

como queríamos.

(b) Prove que $\cos(12°)$ é raiz do polinômio

$$32y^5 - 40y^3 + 10y - 1 = 0.$$

Conclua que $\cos(12°)$ é um número irracional.

Solução:

Do item anterior sabemos que, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x).$$

Assim, para $x = 12°$, obtemos que

$$\cos(60°) = 16\cos^5(12°) - 20\cos^3(12°) + 5\cos(12°).$$

Como $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, então

$$\tfrac{1}{2} = 16\cos^5(12°) - 20\cos^3(12°) + 5\cos(12°).$$

Multiplicando por 2 em ambos os lados da equação, concluímos que

$$32\cos^5(12°) - 40\cos^3(12°) + 10\cos(12°) - 1 = 0.$$

Portanto, $\cos(12°)$ é raiz da equação $32y^5 - 40y^3 + 10y - 1 = 0$.

Por fim, pelo teorema das raízes racionais, as candidatas a raiz racional de tal equação são os números

$$\pm 1,\ \pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{1}{4},\ \pm\tfrac{1}{8},\ \pm\tfrac{1}{16},\ \pm\tfrac{1}{32},$$

e logo vemos que $\frac{1}{2}$ é a única raiz racional da equação.

Como $\cos(60°) = \frac{1}{2} \neq \cos(12°)$, concluímos que $\cos(12°)$ não é uma raiz racional, portanto é irracional.

3. Marie-Sophie Germain (1776-1831) foi uma matemática, física e filósofa francesa com contribuições fundamentais à teoria dos números e à teoria da elasticidade. Desde muito cedo, Marie mostrou interesse pela área das exatas, aprendendo com livros encontrados na biblioteca de seu pai. Ela fez muitas contribuições matemáticas, e uma delas está relacionada aos números primos, conhecidos hoje como primos de Sophie Germain.

   Um número primo p é chamado de primo de Sophie Germain se 2p+1 também for primo. A partir dessa definição, faça o que se pede:

   (a) Determine os 8 primeiros primos de Sophie Germain

Solução:

$p = 2$ é primo e $2p + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ também é primo, portanto 2 é um primo de Sophie Germain.

$p = 3 \Rightarrow 2p + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$

$p = 5 \Rightarrow 2p + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11.$

Prosseguindo-se dessa maneira, os 8 primeiros primos de Sophie Germain são

$$2, 3, 5, 11, 23, 29, 41 \text{ e } 53.$$

   (b) Mostre que, se p é um número primo maior que 3, então $p - 1$ ou $p - 5$ é múltiplo de 6.

Solução:

Pelo algoritmo da divisão, dividir p por 6 implica que existem únicos $k, r \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 6k + r$, com $0 \leq r \leq 5$. Como $p > 3$ e é primo, temos que p não pode ser par, isso exclui alguns possíveis restos na divisão por 6, isto é, $p = 6k + 0$, $6k + 2$ e $6k + 4$. Agora, se $r = 3$ obtemos $p = 6k + 3$ que é um múltiplo de 3, mas como $p > 3$, o mesmo não é um múltiplo de 3. Assim, sobram apenas duas possibilidades, $p = 6k + 1$ ou $p = 6k + 5 \Rightarrow p - 1 = 6k$ ou $p - 5 = 6k \Rightarrow p - 1$ ou $p - 5$ são múltiplos de 6.

   (c) Conclua que, se p é um primo de Sophie Germain e $p > 3$, então $p - 5$ é múltiplo de 6.

Solução:

Como p é primo e maior do que 3, pelo item anterior temos duas possibilidades, $p - 1$ é múltiplo de 6 ou $p - 5$ é múltiplo de 6. Se $p - 1$ for múltiplo de 6, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p - 1 = 6k \Rightarrow p = 6k + 1$ e, como p é primo de Sophie Germain, temos que $2p + 1$ também é primo. Assim, $2p = 12k + 2 \Rightarrow 2p + 1 = 12k + 3 \Rightarrow 2p + 1 = 3(4k + 1)$, disto segue que $2p + 1$ é composto, o que é uma contradição. Logo, a única possibilidade restante é $p - 5$ ser múltiplo de 6, como queríamos mostrar.

4. Em um jogo de tabuleiro estratégico, um jogador precisa fazer uma "Rolagem dos Três Destinos" para determinar o poder de sua próxima jogada. Para isso, ele utiliza três dados especiais: um dado cúbico (D6) numerado de 1 a 6, um dado dodecaédrico (D12) numerado de 1 a 12, e um dado icosaédrico (D20) numerado de 1 a 20. A força total da jogada é a soma dos valores obtidos nos três dados.

(a) Para ativar um bônus especial, um jogador precisa que a soma dos três dados seja exatamente 25. De quantas maneiras distintas isso pode acontecer?

Solução:

Sejam x, y, z os resultados dos dados D6, D12 e D20, respectivamente. Temos as seguintes restrições:

$$1 \leq x \leq 6, \quad 1 \leq y \leq 12, \quad 1 \leq z \leq 20$$

Queremos encontrar o número de soluções inteiras da equação:

$$x + y + z = 25$$

Podemos reescrever a equação como $x + y = 25 - z$. A soma mínima de $x + y$ é $1 + 1 = 2$ e a máxima é $6 + 12 = 18$. Portanto, devemos ter:

$$2 \leq 25 - z \leq 18$$

Analisando a segunda desigualdade, $25 - z \leq 18$, obtemos $z \geq 7$. Assim, o valor do dado D20 deve ser pelo menos 7. Vamos analisar, caso a caso, o número de soluções para $x + y = 25 - z$ para cada valor possível de $z \geq 7$.

- Se $z = 7$, $x + y = 18$. A única solução é $(x, y) = (6, 12)$. (1 maneira)
- Se $z = 8$, $x + y = 17$. Soluções: $(5, 12), (6, 11)$. (2 maneiras)
- Se $z = 9$, $x + y = 16$. Soluções: $(4, 12), (5, 11), (6, 10)$. (3 maneiras)
- Se $z = 10$, $x + y = 15$. Soluções: $(3, 12), (4, 11), (5, 10), (6, 9)$. (4 maneiras)
- Se $z = 11$, $x + y = 14$. Soluções: $(2, 12), (3, 11), (4, 10), (5, 9), (6, 8)$. (5 maneiras)
- Se $z = 12$, $x + y = 13$. Soluções: $(1, 12), (2, 11), \ldots, (6, 7)$. (6 maneiras)
- Se $z \in \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, a soma $x + y$ estará no intervalo $[7, 12]$. Para qualquer $x \in \{1, \ldots, 6\}$, sempre existe um y correspondente tal que $1 \leq y \leq 12$. Portanto, para cada um desses 6 valores de z, há 6 maneiras. Total: $6 \times 6 = 36$ maneiras.
- Se $z = 19$, $x + y = 6$. Soluções: $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$. (5 maneiras)
- Se $z = 20$, $x + y = 5$. Soluções: $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$. (4 maneiras)

O número total de maneiras é a soma das maneiras de cada caso:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 36 + 5 + 4 = 66 \text{ maneiras.}$$

(b) Para derrotar um monstro com um golpe crítico, um jogador precisa de uma soma excepcionalmente alta, superior a 35. Qual é a probabilidade de um jogador conseguir esse feito em uma única rolagem dos três dados?

Solução:

O número total de resultados possíveis é o produto do número de faces de cada dado:

$$N_{total} = 6 \times 12 \times 20 = 1440$$

Para obter uma soma superior a 35, a soma deve ser 36, 37 ou 38. A soma máxima é $6 + 12 + 20 = 38$. Vamos listar os resultados favoráveis (x, y, z):

- $x+y+z = 38$: A única maneira é obter o valor máximo em todos os dados: $(6, 12, 20)$. (1 maneira)
- $x + y + z = 37$: Devemos reduzir a soma total em 1. Isso pode ser feito reduzindo o resultado de um dos dados em 1: $(5, 12, 20)$, $(6, 11, 20)$, $(6, 12, 19)$. (3 maneiras)
- $x + y + z = 36$: Devemos reduzir a soma total em 2. Isso pode ser feito de duas formas:
  - Reduzindo o resultado de um dado em 2: $(4, 12, 20)$, $(6, 10, 20)$, $(6, 12, 18)$. (3 maneiras)
  - Reduzindo o resultado de dois dados em 1 cada: $(5, 11, 20)$, $(5, 12, 19)$, $(6, 11, 19)$. (3 maneiras)

  Total para a soma 36: $3 + 3 = 6$ maneiras.

O número total de maneiras de obter uma soma maior que 35 é $1 + 3 + 6 = 10$. A probabilidade é a razão entre os resultados favoráveis e o total de resultados:

$$P(\text{Soma} > 35) = \frac{10}{1440} = \frac{1}{144}$$

(c) Em uma rodada avançada, uma carta de feitiço altera as regras da rolagem do D20 e do D12:

- Se o valor obtido no D20 for par, será considerada a metade do número obtido.
- Se o valor obtido no D12 for ímpar, será considerado o dobro do número obtido.

Utilizando estas regras, um jogador faz sua jogada e anuncia que a soma final foi 30. Qual é a probabilidade de que o resultado obtido no dado D20 tenha sido um número par?

Solução:

Sejam x, y_0, z_0 os valores originais dos dados D6, D12 e D20. Sejam y_e, z_e os valores efetivos após a regra do feitiço. A soma final é $S = x + y_e + z_e = 30$.

Queremos calcular a probabilidade condicional $P(z_0 \text{ é par}|S = 30)$. Pela definição, temos:

$$P(z_0 \text{ é par}|S = 30) = \frac{N(z_0 \text{ é par} \cap S = 30)}{N(S = 30)},$$

no qual $N(\cdot)$ é o número de combinações. Vamos encontrar todas as combinações (x, y_0, z_0) para as quais a soma é 30, dividindo em quatro casos.

Caso 1: z_0 par, y_0 ímpar. $(z_e = z_0/2, y_e = 2y_0)$ A equação é $x + 2y_0 + z_0/2 = 30$. Listando as soluções:

- Se $z_0 = 20$ $(z_e = 10) \Rightarrow x + 2y_0 = 20 \Rightarrow (x, y_0) = (2, 9), (6, 7)$. (2 comb.)
- Se $z_0 = 18$ $(z_e = 9) \Rightarrow x + 2y_0 = 21 \Rightarrow (x, y_0) = (3, 9)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 16$ $(z_e = 8) \Rightarrow x + 2y_0 = 22 \Rightarrow (x, y_0) = (4, 9)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 14$ $(z_e = 7) \Rightarrow x + 2y_0 = 23 \Rightarrow (x, y_0) = (1, 11), (5, 9)$. (2 comb.)
- Se $z_0 = 12$ $(z_e = 6) \Rightarrow x + 2y_0 = 24 \Rightarrow (x, y_0) = (2, 11), (6, 9)$. (2 comb.)
- Se $z_0 = 10$ $(z_e = 5) \Rightarrow x + 2y_0 = 25 \Rightarrow (x, y_0) = (3, 11)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 8$ $(z_e = 4) \Rightarrow x + 2y_0 = 26 \Rightarrow (x, y_0) =, (4, 11)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 6$ $(z_e = 3) \Rightarrow x + 2y_0 = 27 \Rightarrow (x, y_0) = (5, 11)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 4$ $(z_e = 2) \Rightarrow x + 2y_0 = 28 \Rightarrow (x, y_0) = (6, 11)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 2$ $(z_e = 1) \Rightarrow x + 2y_0 = 29 \Rightarrow$ (0 comb.)

Total para o Caso 1: $2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$ combinações. Este é o nosso numerador, $N(z_0 \text{ é par} \cap S = 30)$.

Caso 2: z_0 par, y_0 par. $(z_e = z_0/2, y_e = y_0)$ A equação é $x + y_0 + z_0/2 = 30$. A soma máxima de $x + y_0$ é $6 + 12 = 18$. A equação pode ser escrita como $x + y_0 = 30 - z_0/2$. Para haver solução, $30 - z_0/2 \leq 18 \Rightarrow z_0/2 \geq 12 \Rightarrow z_0 \geq 24$, o que é impossível. Total: 0 combinações.

Caso 3: z_0 ímpar, y_0 ímpar. $(z_e = z_0, y_e = 2y_0)$ A equação é $x + 2y_0 + z_0 = 30$.

- Se $z_0 = 19 \Rightarrow x + 2y_0 = 11 \Rightarrow (x, y_0) = (1, 5), (5, 3)$. (2 comb.)
- Se $z_0 = 17 \Rightarrow x + 2y_0 = 13 \Rightarrow (x, y_0) = (3, 5)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 15 \Rightarrow x + 2y_0 = 15 \Rightarrow (x, y_0) = (1, 7), (5, 5)$. (2 comb.)

- Se $z_0 = 13 \Rightarrow x + 2y_0 = 17 \Rightarrow (x, y_0) = (3, 7)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 11 \Rightarrow x + 2y_0 = 19 \Rightarrow (x, y_0) = (1, 9), (5, 7)$. (2 comb.)
- Se $z_0 = 9 \Rightarrow x + 2y_0 = 21 \Rightarrow (x, y_0) = (3, 9)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 7 \Rightarrow x + 2y_0 = 23 \Rightarrow (x, y_0) = (1, 11), (5, 9)$. (2 comb.)
- Se $z_0 = 5 \Rightarrow x + 2y_0 = 25 \Rightarrow (x, y_0) = (3, 11)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 3 \Rightarrow x + 2y_0 = 27 \Rightarrow (x, y_0) = (5, 11)$. (1 comb.)
- Se $z_0 = 1 \Rightarrow x + 2y_0 = 29 \Rightarrow$ (0 comb.)

Total para o Caso 3: $2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 13$ combinações.

Caso 4: z_0 ímpar, y_0 par. $(z_e = z_0, y_e = y_0)$ A equação é $x + y_0 + z_0 = 30$.

- Se $z_0 = 19 \Rightarrow x + y_0 = 11 \Rightarrow (1, 10), (3, 8), (5, 6)$. (3 comb.)
- Se $z_0 = 17 \Rightarrow x + y_0 = 13 \Rightarrow (1, 12), (3, 10), (5, 8)$. (3 comb.)
- Se $z_0 = 15 \Rightarrow x + y_0 = 15 \Rightarrow (3, 12), (5, 10)$. (2 comb.)
- Se $z_0 = 13 \Rightarrow x + y_0 = 17 \Rightarrow (5, 12)$. (1 comb.)

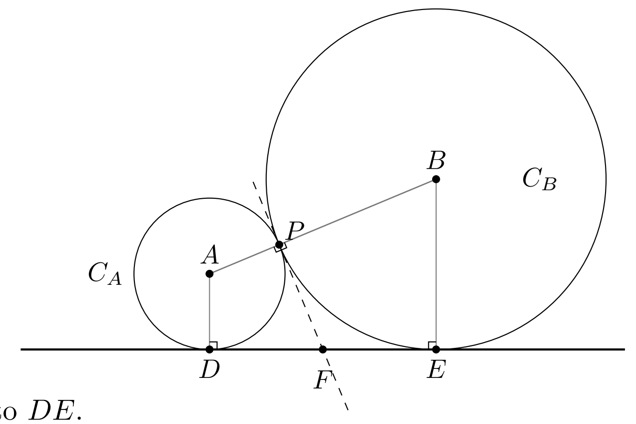
Total para o Caso 4: $3 + 3 + 2 + 1 = 9$ combinações.

O número total de maneiras de obter a soma 30 é $N(S = 30) = 12 + 0 + 13 + 9 = 34$. O número de maneiras com z_0 par é 12.

A probabilidade de que o resultado obtido no dado D20 tenha sido um número par é:

$$P = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$$

5. Duas circunferências, C_A e C_B, de centros A e B e raios r_A e r_B respectivamente, são tangentes externamente em um ponto P. Sabe-se que o raio de C_A é $r_A = 4$. Uma reta t é tangente comum externa a ambas as circunferências, tocando C_A no ponto D e C_B no ponto E. O comprimento do segmento DE é 12. Uma terceira reta, que é tangente a ambas as circunferências no ponto P, intercepta o segmento DE em um ponto F. Com base nessas informações, resolva os itens a seguir:



(a) Mostre que F é o ponto médio do segmento DE.

Solução:

Considere os triângulos $\triangle ADF$ e $\triangle APF$. Note que ambos são triângulos retângulos, pois D e P são pontos de tangencia das retas tangentes à circunferência. Além disso, AP e AD são raios da circunferência C_A. Portanto, como ambos triângulos retângulos possuem um cateto e a hipotenusa de mesmo comprimento, eles são congruentes. Desta forma, obtemos $DF = PF$.

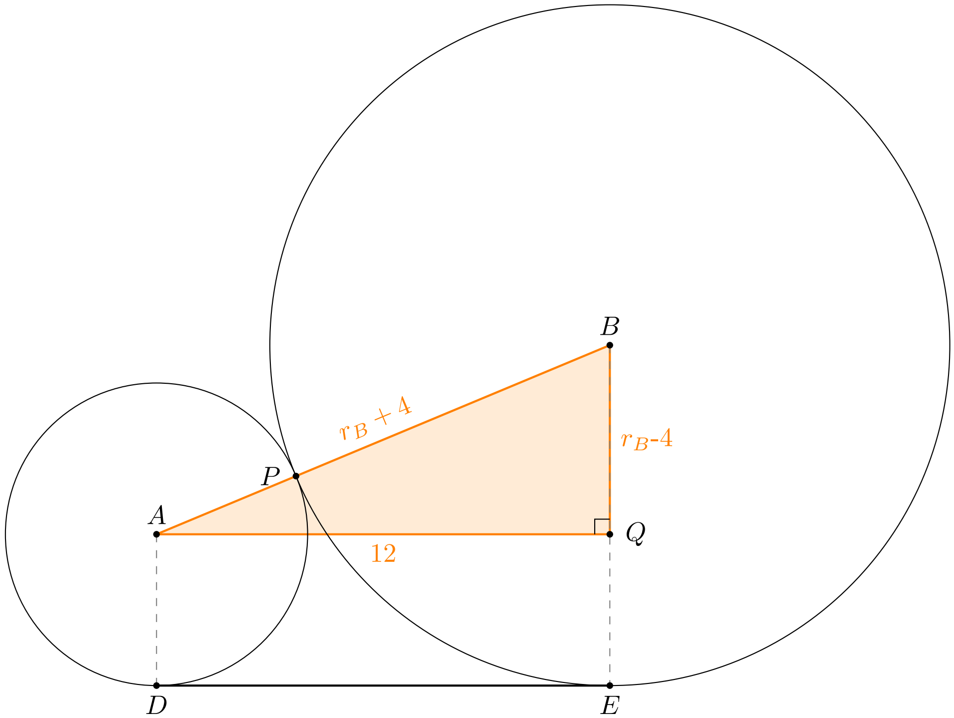
De maneira similar, considere os riângulos $\triangle BEF$ e $\triangle BPF$. Note que ambos são triângulos retângulos, pois E e P são pontos de tangencia das retas tangentes à circunferência. Além disso, BP e BE são raios da circunferência C_B. Portanto, como ambos triângulos retângulos possuem um cateto e a hipotenusa de mesmo comprimento, eles são congruentes. Desta forma, obtemos $FE = PF$.

Portanto $DF = PF = FE$, o que implica que F é ponto médio do segmento DE.

(b) Calcule o valor do raio da circunferência C_B.

Solução:

Traçando uma reta paralela a reta t passando por A, ela intersecta o segmento BE num ponto Q e obtemos um triângulo $\triangle BAQ$.



Como $AQED$ é um retângulo, temos que $AQ = DE = 12$. Além disso, $QE = AD = r_A = 4$. Assim, como $BE = r_B$, concluímos que $BQ = r_B - 4$. Por fim, como P é ponto de tangencia das duas circunferências, temos que $AB = r_A + r_B = 4 + r_B$. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$(r_B + 4)^2 = (r_B - 4)^2 + 12^2 \implies (r_B + 4)^2 - (r_B - 4)^2 = 144$$

Pela diferença de quadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, obtemos

$$144 = (r_B + 4)^2 - (r_B - 4)^2 = ((r_B + 4) + (r_B - 4))((r_B + 4) - (r_B - 4)) = (2r_B) \cdot 8 = 16r_B$$

Logo, $r_B = \dfrac{144}{16} = 9$.

(c) Calcule o comprimento do segmento PE.

Solução:

Analisando o triângulo $\triangle BAQ$ obtido no item anterior, ao denotar por $\theta = A\widehat{B}Q$, temos que

$$\cos\theta = \frac{BQ}{AB} = \frac{9-4}{13} = \frac{5}{13}.$$

Assim, ao analisar o triângulo $\triangle PBE$, obtemos da Lei dos Cossenos que

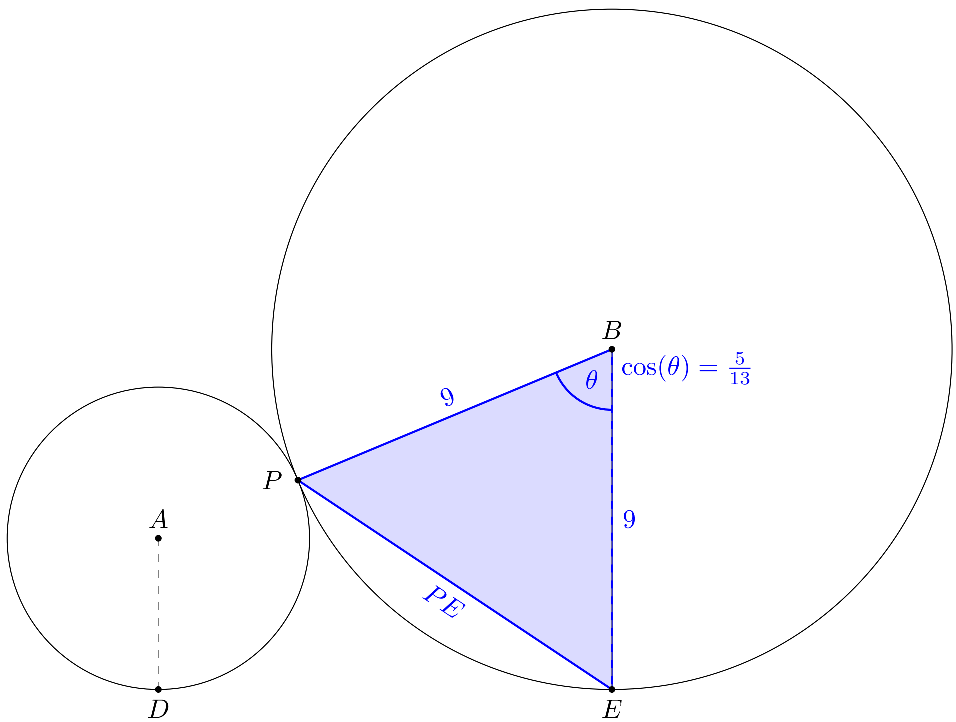
$$PE^2 = PB^2 + BE^2 - 2 \cdot PB \cdot PQ \cdot \cos\theta.$$

Como $PB = BE = 9$, obtemos

$$PE^2 = 9^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{5}{13} = 81 + 81 - \frac{810}{13} = \frac{1296}{13}.$$

Logo,

$$PE = \sqrt{\frac{1296}{13}} = \frac{36}{\sqrt{13}} = \frac{36\sqrt{13}}{13}$$



6. Sejam a e p inteiros positivos com p sendo primo. Se mdc(a, p) = 1 então $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p.

   Leonhard Euler (1707–1783) generalizou este resultado com o que hoje é conhecido como Teorema de Euler, que afirma o seguinte:

   > Sejam a e n inteiros positivos com mdc(a, n) = 1, então $a^{\varphi(n)} - 1$ é múltiplo de n.

   Aqui, $\varphi(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função que conta quantos números inteiros positivos menores ou iguais a n são coprimos com n, ou seja, têm máximo divisor comum igual a 1 com n. Essa função é chamada de função Phi de Euler.

   Com base nisso, responda às seguintes questões:

   (a) Calcule $\varphi(7)$, $\varphi(11)$ e $\varphi(41)$.

Solução:

Para calcular $\varphi(7)$ devemos contar quantos números inteiros positivos menores ou iguais a 7 são coprimos com 7. Temos então que $\text{mdc}(1, 7) = 1 = \text{mdc}(2, 7) = \text{mdc}(3, 7) = \text{mdc}(4, 7) = \text{mdc}(5, 7) = \text{mdc}(6, 7)$. Ou seja, $\varphi(7) = 6$. Prosseguindo-se de forma similar, obtém-se que $\varphi(11) = 10$ e $\varphi(41) = 40$.

(b) Prove que, se p é um número primo, então $\varphi(p) = p - 1$. Conclua que, nesse caso, o Teorema de Euler coincide com o Pequeno Teorema de Fermat.

Solução:

Como p é um número primo, seus únicos divisores positivos são 1 e p. Sabemos que m não divide $p \Leftrightarrow \text{mdc}(m, p) = 1$. Assim, todos os inteiros $1, 2, 3, \ldots, p-1$ são coprimos com p, logo $\varphi(p) = p - 1$.

Agora mostraremos que o Teorema de Euler coincide com o de Fermat, com efeito, se $\text{mdc}(a, n) = 1$, então $a^{\varphi(n)} - 1$ é múltiplo de n. Em particular, seja p um primo com $\text{mdc}(a, p) = 1$, tem-se que $a^{\varphi(p)} - 1 = a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p, que é justamente o Pequeno Teorema de Fermat.

(c) Mostre que, se mdc(a, n) = mdc(a - 1, n) = 1, onde a é um inteiro positivo maior ou igual a 2, então a soma

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{\varphi(n)-1}$$

é múltiplo de n.

Solução:

Seja $S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{\varphi(n)-1}$, perceba que S é a soma de uma progressão geométrica de razão a e, pela fórmula da soma da P.G., tem-se

$$S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{\varphi(n)-1} = \frac{a^{\varphi(n)} - 1}{a - 1} \Rightarrow a^{\varphi(n)} - 1 = S \cdot (a - 1)$$

e, como $\text{mdc}(a, n) = 1$, pelo Teorema de Euler temos que $a^{\varphi(n)} - 1 = S \cdot (a - 1)$ é múltiplo de n. Além disso, como $\text{mdc}(a - 1, n) = 1$, segue que $S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{\varphi(n)-1}$ é múltiplo de n.