1. Em uma estação espacial há um painel de controle no formato 5×5, composto por 25 botões dispostos em 5 linhas e 5 colunas, numerados de 1 a 25 (linha a linha). Cada botão pode ser acionado no máximo uma vez por astronauta.

   As astronautas Ana, Bruna e Carolina devem ativar três botões distintos do painel a fim de completar uma simulação de emergência.

   (a) De quantas maneiras distintas as astronautas podem acionar três botões do painel para completar a simulação?

Solução:

O painel possui 25 botões distintos, organizados em uma matriz 5×5. Como temos três astronautas (Ana, Bruna e Carolina) e cada uma delas deve escolher exatamente um botão, sem que haja repetição, estamos diante de um problema de contagem de arranjos, pois tanto a escolha quanto a ordem das atribuições importam.

Primeiro, observe que a astronauta Ana pode escolher qualquer um dos 25 botões disponíveis. Em seguida, como Bruna não pode repetir a escolha de Ana, restam apenas 24 possibilidades para ela. Finalmente, para Carolina, que também precisa apertar um botão distinto, restam 23 opções.

Portanto, o número total de maneiras distintas de distribuir os botões entre as três astronautas é dado por

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \quad = \quad 13800.$$

Outra forma de expressar esse raciocínio é notar que estamos calculando o número de arranjos de $k = 3$ elementos dentre $n = 25$, isto é,

$$\begin{aligned} A(25,3) &= \frac{25!}{(25-3)!} \\ &= \frac{25!}{22!} \\ &= 25 \cdot 24 \cdot 23 \\ &= 13800. \end{aligned}$$

Assim, existem exatamente 13800 maneiras possíveis de as astronautas ativarem três botões distintos, respeitando a condição de exclusividade.

(b) Se a numeração dos botões não for considerada, isto é, se apenas o conjunto das três posições ativadas importar e sem distinguir quem apertou qual, quantas são as possibilidades?

Solução:

Neste caso, o que nos interessa não é qual astronauta apertou qual botão, mas apenas o conjunto final de três posições ativadas no painel de controle 5×5, que contém 25 botões distintos. Como a ordem das escolhas não importa, devemos contar subconjuntos de tamanho $k = 3$ dentre as $n = 25$ posições disponíveis, ou seja, estamos diante de um problema de combinações.

Formalmente, temos:

$$\begin{aligned} C(25,3) &= \binom{25}{3} \\ &= \frac{25!}{3!(25-3)!} \\ &= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 2300. \end{aligned}$$

Portanto, existem exatamente 2300 maneiras distintas de ativar três botões no painel quando apenas o conjunto final importa, sem levar em conta qual astronauta apertou cada botão.

(c) Em uma versão mais avançada da simulação, as astronautas devem apertar três botões distintos do painel de forma que os botões escolhidos não podem estar na mesma linha ou coluna, e o botão central do painel não pode ser utilizado. De quantas maneiras diferentes as astronautas podem realizar essa ativação?

Solução:

Cada astronauta deve apertar um botão distinto, e os botões escolhidos não podem estar na mesma linha ou coluna, nem incluir o botão central (posição 13).

Primeiro, consideremos todas as escolhas possíveis sem levar em conta a restrição de que o botão central não pode ser usado.

- Escolha 3 linhas distintas entre 5:

$$C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10 \text{ maneiras;}$$

- Escolha 3 colunas distintas entre 5:

$$C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10 \text{ maneiras;}$$

- Para cada escolha de 3 linhas e 3 colunas, é preciso atribuir uma coluna distinta a cada linha. Isso pode ser feito de $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de posições sem restrição do botão central é:

$$10 \cdot 10 \cdot 6 = 600.$$

Se o botão central (posição 13) fosse incluído, restariam apenas 4 linhas e 4 colunas disponíveis para posicionar os outros dois botões. Neste caso, temos que:

- Número de maneiras de escolher 2 linhas entre 4 é
$$C(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6 \text{ maneiras;}$$
- Número de maneiras de escolher 2 colunas entre 4 é
$$C(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6 \text{ maneiras;}$$
- Permutação das colunas entre as linhas restantes: $2! = 2$ maneiras.

Assim, o número total de disposições envolvendo o botão central seria:

$$6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$$

Como o botão central não pode ser usado, devemos excluir essas 72 configurações do total de 600, isto é,

$$600 - 72 = 528.$$

Agora, note que, como cada botão recebe uma cor diferente, e há $3! = 6$ maneiras de distribuir as cores, o número final de configurações é:

$$528 \cdot 6 = 3168.$$

Portanto, existem 3168 maneiras de as astronautas acionarem os três botões, respeitando todas as restrições de cores, linhas, colunas e exclusão do botão central.

2. Seja n um número natural de apenas um algarismo. Defina $T(n)$ como o número formado pela repetição de n três vezes, isto é, $T(n) = nnn$. Por exemplo, $T(4) = 444$ e $T(8) = 888$.

   (a) Seja $Q(n)$ o quociente entre $T(n)$ e a soma $s(T(n))$ dos algarismos de $T(n)$. Mostre que $Q(n)$ é constante, para todo $n \geq 1$ natural.

Solução:

Pela definição de $T(n)$, podemos representá-lo e sua forma posicional, usando a base decimal (base 10), isto é,

$$T(n) = nnn = n \cdot 100 + n \cdot 10 + n \cdot 1,$$

Sendo n o fator em comum e colocando-o em evidência, temos:

$$T(n) = n \cdot (100 + 10 + 1) = n \cdot 111.$$

A soma dos algarismos de $T(n)$ é dada por:

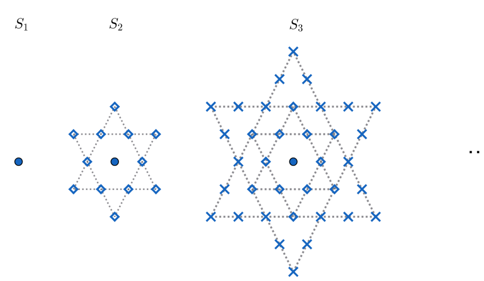
$$s(T(n)) = n + n + n = 3 \cdot n.$$

Dessa forma, o quociente entre $T(n)$ e $s(T(n))$ é

$$Q(n) \quad = \quad \frac{T(n)}{s(T(n))} = \frac{111n}{3n} = \frac{111\cancel{n}}{3\cancel{n}} = \frac{111}{3} = 37.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$ natural, o quociente $Q(n)$ é constante e igual a 37.

(b) Um **número estelar** (ou **número estrela**) é um tipo especial de número figurado, cuja forma corresponde a um hexagrama — a clássica estrela de seis pontas obtida pela sobreposição de dois triângulos equiláteros.



O m-ésimo número estelar é definido por:

$$S_m = 6m(m-1) + 1, \text{ onde } m \geq 1 \text{ é um número natural.}$$

Determine todos os valores de $m \leq 50$ ímpares para os quais S_m é múltiplo de $Q(n)$.

Solução:

Queremos que o número estelar $S_m = 6m(m-1)+1$ seja múltiplo de $Q(n) = 37$, isto é, que exista um inteiro t tal que

$$6m(m-1)+1 = 37t. \tag{1}$$

De (1), $6m(m-1) = 37t-1$, ou seja, $37t-1$ é múltiplo de 6. Como 37 deixa resto 1 na divisão por 6 ($37 \equiv 1 \pmod 6$), temos:

$$\begin{aligned} 37t-1 \text{ é múltiplo de } 6 &\Leftrightarrow 37t-1 \equiv 0 \pmod 6 \\ &\Leftrightarrow 37t \equiv 1 \pmod 6 \\ &\Leftrightarrow t \equiv 1 \pmod 6, \end{aligned}$$

ou seja,

$$t = 6k+1, \text{ para algum inteiro } k. \tag{2}$$

Usando (2) em (1), obtemos $6m(m-1)+1 = 37t = 37\cdot(6k+1) = 37\cdot 6k + 37$.

Assim,

$$\begin{aligned} 6m(m-1) &= 37\cdot 6k + 37 - 1 \\ &= 37\cdot 6k + 36 \\ &= 37\cdot 6k + 6\cdot 6, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} m(m-1) &= \frac{37\cdot 6k + 6\cdot 6}{6} \\ &= \frac{6\cdot(37k+6)}{6} \\ &= \frac{\cancel{6}\cdot(37k+6)}{\cancel{6}} \\ &= 37k+6. \end{aligned}$$

Escrevendo $m(m-1) = m^2 - m$, temos:

$$m^2 - m = 37k+6. \tag{3}$$

Completando o quadrado e, em seguida, multiplicando por 4, observe que:

$$\begin{aligned} m^2 - m + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 37k + 6 \quad &\Leftrightarrow \quad m^2 - m + \frac{1}{4} = 37k + 6 + \frac{1}{4} = 37k + \frac{25}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 4 \cdot \left(m^2 - m + \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(37k + \frac{25}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 4m + 1 = 148k + 25, \end{aligned}$$

isto é,

$$(2m-1)^2 = 148k + 5^2. \tag{4}$$

Agora, tomando $s := 2m - 1$,

$$s^2 = 148k + 5^5 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 - 5^2 = 148k \quad \Leftrightarrow \quad (s+5)(s-5) = 148k. \tag{5}$$

Em particular, note que:

- como s é ímpar, tanto $s+5$ quanto $s-5$ são números pares. Assim, o produto $(s+5)(s-5)$ é múltiplo de 4, e consequentemente é par;
- sendo 37 primo, se 37 divide o produto $(s+5)(s-5)$, então 37 deve dividir pelo menos um dos fatores. Como cada fator é par, concluímos que $s+5$ e $s-5$ podem ser expressos como múltiplos pares de 37, ou seja, $s+5 = 37 \cdot (2\alpha)$ ou $s - 5 = 37 \cdot (2\beta)$, com $\alpha, \beta \geq 0$ inteiros.

Se $s+5$ é múltiplo de 37, temos

$$\begin{aligned} s + 5 = 37p, \text{ com } p \text{ inteiro tal que } p = 2\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad (2m-1) + 5 = 37 \cdot (2\alpha) \\ &\Leftrightarrow \quad 2m + 4 = 2 \cdot 37\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{2} \cdot (m+2) = \cancel{2} \cdot 37\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad m + 2 = 37\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad m = 37\alpha - 2. \end{aligned}$$

Analogamente, se $s-5$ é múltiplo de 37, então

$$\begin{aligned} s - 5 = 37q, \text{ com } q \text{ inteiro tal que } q = 2\beta \quad &\Leftrightarrow \quad (2m-1) - 5 = 37 \cdot (2\beta) \\ &\Leftrightarrow \quad 2m - 6 = 2 \cdot 37\beta \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{2} \cdot (m-3) = \cancel{2} \cdot 37\beta \\ &\Leftrightarrow \quad m - 3 = 37\beta \\ &\Leftrightarrow \quad m = 37\beta + 3. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos duas famílias de soluções inteiras para $m \geq 1$:

$$m = 37\alpha - 2 \quad \text{e} \quad m = 37\beta + 3, \text{ com } \alpha, \beta \geq 0 \text{ inteiros.}$$

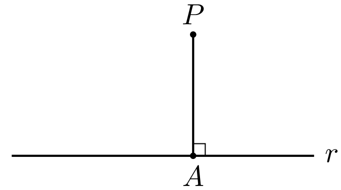
Como estamos interessados em valores de $m \leq 50$ e ímpares, basta verificar os inteiros α e β que satisfaçam essas condições:

- para $m = 37\alpha - 2 \leq 50$, temos $\alpha = 1 \Rightarrow m = 37 \cdot 1 - 2 = 35$;
- para $m = 37\beta + 3 \leq 50$, temos $\beta = 0 \Rightarrow m = 37 \cdot 0 + 3 = 3$.

Portanto, os valores de m que satisfazem todas as condições são $m = 3$ e $m = 35$.

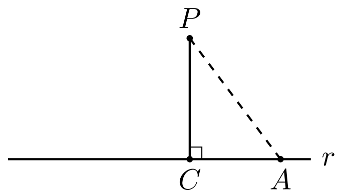
3. Dada uma reta r e um ponto P fora dela, chamamos distância de P até r, denotada $d(P, r)$, o comprimento do menor segmento PQ, em que $Q \in r$.

(a) Seja $A \in r$ tal que $PA = d(P, r)$. Prove que PA é perpendicular a r.



Solução:

Suponha que o segmento PA não seja perpendicular à reta r. Isso significa que o ângulo entre PA e r não é $90°$.



Vamos considerar C como o pé da perpendicular de P à reta r. Se PA não é perpendicular a r, então $A \neq C$. O triângulo $\triangle PCA$ é um triângulo retângulo em C.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$PA^2 = PC^2 + AC^2$$

Como $A \neq C$, a distância $AC > 0$, o que implica $AC^2 > 0$.

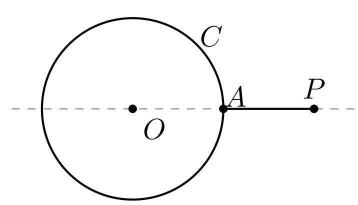
Portanto, $PA^2 > PC^2$. Tomando a raiz quadrada de ambos os lados, obtemos $PA > PC$.

Mas $PC = d(P, r)$ por definição da projeção ortogonal. Então, $PA > d(P, r)$.

Isto contradiz a suposição de que $PA = d(P, r)$. A única forma de $PA = d(P, r)$ é se $A = C$, ou seja, se PA for a própria perpendicular à reta r.

Portanto, o segmento PA deve ser perpendicular à reta r.

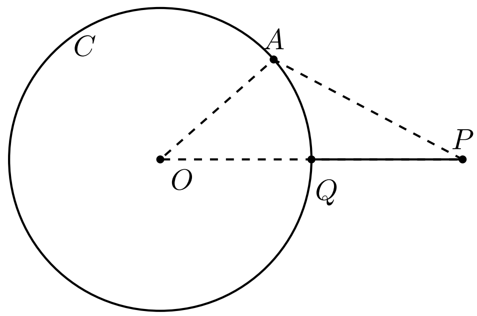
(b) Considere C uma circunferência de centro O e raio R. Para um ponto $P \notin C$, chamamos distância de P até C, denotada $d(P, C)$, o comprimento do menor segmento PQ, em que $Q \in C$. Seja $A \in C$ tal que $PA = d(P, C)$. Mostre que P, A e O são colineares.



Solução:

Vamos provar que os pontos P, A e O são colineares usando a desigualdade triangular.

Suponha, por contradição, que os pontos P, A e O não sejam colineares e considere Q o ponto de interseção da circunferência C com o segmento OP.



Vamos agora analisar o triângulo $\triangle PAO$, formado pelos pontos P, A e O. Pela desigualdade triangular, a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é sempre maior que o comprimento do terceiro lado. Portanto

$$PO < PA + AO$$

Como o ponto A está na circunferência, o segmento OA é o raio R da circunferência. Assim, $OA = R$. Substituindo na desigualdade, obtemos

$$PO < PA + R$$

Agora, vamos analisar a distância PO de outra forma. Como P, Q e O são colineares, a distância de P a O é a soma das distâncias PQ e QO. Como Q está na circunferência, QO é o raio R. Portanto

$$PO = PQ + QO = PQ + R$$

Substituindo essa expressão de PO na desigualdade anterior, obtemos

$$PQ + R < PA + R$$

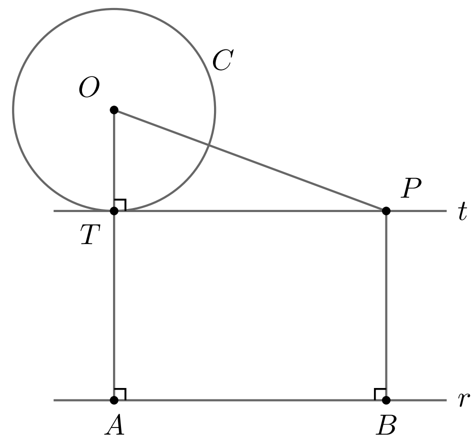
Subtraindo R de ambos os lados da desigualdade, chegamos a

$$PQ < PA$$

Esta conclusão, $PQ < PA$, contradiz nossa hipótese inicial de que PA é a menor distância de P à circunferência C. A única maneira de essa contradição não ocorrer é se o ponto A for o mesmo que o ponto Q.

Portanto, o ponto A deve ser o ponto de interseção do segmento PO com a circunferência C. Isso significa que os pontos P, A e O são, de fato, colineares.

(c) Seja C uma circunferência de centro O. A reta r é externa a C, e t é a tangente a C paralela a r, entre C e r, com ponto de tangência T. Seja $P \in t$ tal que $TP = 45$. Sabendo que $d(O, r) = 48$ e que $d(P, C) = d(P, r)$, determine $d(P, C)$.



Solução:

Sejam A o ponto na reta r tal que $d(O, r) = OA$ e B o ponto na reta r tal que $d(P, r) = PB$. Como t é paralela a reta r e t é tangente a circunferencia C em T, concluímos que O, T e A são colineares. Assim, obtemos o retângulo $TPBA$ e, portanto, $TA = PB$. Como $OA = d(O, r) = 48$ e $OA = OT + TA$, obtemos que

$$OT = 48 - TA = 48 - PB.$$

Além disso, denotando por R o raio da circunferência C, temos que $PO = R + d(P, C)$. Agora, como $d(P, C) = d(P, r) = PB$ e OT também é um raio da circunferência, obtemos

$$PO = OT + PB.$$

Substituindo a expressão obtida anteriormente para OT, concluímos que $PO = 48$.

No triângulo retângulo $\triangle OTP$, temos

$$PO^2 = OT^2 + TP^2 = R^2 + 45^2.$$

Substituindo $PO = 48$, obtemos

$$48^2 = R^2 + 45^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = 2304 - 2025 = 279 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{279} = 3\sqrt{31}.$$

Por fim, como $d(P, C) = d(P, r) = PB = PO - R$, obtemos

$$d(P, C) = PO - R = 48 - 3\sqrt{31}.$$

4. Considere uma tabela com linhas e colunas numeradas de 1 a 2025, preenchida da seguinte forma:

- na linha 1, todas as casas recebem o número 1;
- para cada linha $n > 1$, a célula da coluna c recebe:

$$T(n,c) = \begin{cases} n, & \text{se } c \text{ for múltiplo de } n \text{ e } n \text{ for divisor de } 2025 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Qual é o valor da célula na linha 45 e coluna 2025? Justifique sua resposta.

Solução:

Para determinar $T(45, 2025)$, verificamos as condições da regra: o número da linha deve ser um divisor de 2025 e o número da coluna deve ser um múltiplo do número da linha.

Neste caso, como $2025 = 45 \cdot 45$, ambas condições são satisfeitas. Portanto, nessa célula, o valor registrado é o próprio número da linha, isto é, $T(45, 2025) = 45$.

(b) Determine a soma de todos os números da linha 135.

Solução:

Primeiro, note que $2025 = 15 \cdot 135$, ou seja, $n = 135$ é divisor de 2025. Isso significa que a linha 135 pode conter valores não nulos. Além disso, 135 tem exatamente 15 múltiplos menores ou iguais a 2025.

Agora, para $i \in \{1, 2, \ldots, 15\}$, defina

$$c_i := 135 \cdot i$$

a i-ésima coluna cujo número é múltiplo de 135.

Assim, a célula da coluna c_i recebe o número

$$T(135, c_i) = 135, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, 15\}.$$

Logo, a soma de todos os números da linha 135 é

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{15} T(135, c_i) &= \sum_{i=1}^{15} 135 \\ &= 15 \cdot 135 \\ &= 2025. \end{aligned}$$

(c) Considere todas as colunas que são múltiplos de 45. Determine a soma de todos os números contidos nessas colunas.

Solução:

A fatoração de 2025 é $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Assim, todo divisor de 2025 tem a forma:

$$d = 3^a \cdot 5^b, \text{ onde } 0 \leq a \leq 4 \text{ e } 0 \leq b \leq 2.$$

Neste caso, temos $d \in L = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025\}$. Essas são as linhas com células não nulas.

Agora, para que d seja múltiplo de 45, é necessário que tenha pelo menos 3^2 e 5 na sua fatoração.

Sendo assim, os divisores de 2025 múltiplos de 45 são:

- para $a = 2$: $3^2 \cdot 5 = 45$ e $3^2 \cdot 5^2 = 225$;
- para $a = 3$: $3^3 \cdot 5 = 135$ e $3^3 \cdot 5^2 = 675$;
- para $a = 4$: $3^4 \cdot 5 = 405$ e $3^4 \cdot 5^2 = 2025$.

Logo, as colunas que devemos considerar são:

$$C = \{45, 135, 225, 405, 675, 2025\}.$$

Pela regra de preenchimento da tabela, fixada uma linha n, o número $T(n, c) = n$ aparece exatamente nas colunas c que são múltiplas de n.

Por exemplo, na linha $n = 5$, o número 5 aparece nas colunas nas colunas múltiplas de 5, ou seja, nas colunas 45, 135, 225, 405, 675 e 2025.

		COLUNAS (MÚLTIPLOS DE 45)					
		45	**135**	**225**	**405**	**675**	**2025**
LINHAS (DIVISORES DE 2025)	**1**	1	1	1	1	1	1
	3	3	3	3	3	3	3
	5	5	5	5	5	5	5
	9	9	9	9	9	9	9
	15	15	15	15	15	15	15
	25	0	0	25	0	25	25
	27	0	0	0	27	27	27
	45	45	45	45	45	45	45
	75	0	0	75	0	75	75
	81	0	0	0	81	0	81
	135	0	135	0	135	135	135
	225	0	0	225	0	225	225
	405	0	0	0	405	0	405
	675	0	0	0	0	675	675
	2025	0	0	0	0	0	2025

Em particular, na linha n, se há $k(n)$ colunas múltiplas de n, então a soma das células nessa linha é dada por:

$$S(n) = \sum_{c \in C} T(n, c) = n \cdot k(n).$$

Dessa forma, note que:

- em $n = 1$: $S(1) = 1 \cdot k(1) = 1 \cdot 6 = 6$;
- em $n = 3$: $S(3) = 3 \cdot k(3) = 3 \cdot 6 = 18$;
- em $n = 5$: $S(5) = 5 \cdot k(5) = 5 \cdot 6 = 30$;
- em $n = 9$: $S(9) = 9 \cdot k(9) = 9 \cdot 6 = 54$;
- em $n = 15$: $S(15) = 15 \cdot k(15) = 15 \cdot 6 = 90$;
- em $n = 25$: $S(25) = 25 \cdot k(25) = 25 \cdot 3 = 75$;
- em $n = 27$: $S(27) = 27 \cdot k(27) = 27 \cdot 3 = 81$;
- em $n = 45$: $S(45) = 45 \cdot k(45) = 45 \cdot 6 = 270$;
- em $n = 75$: $S(75) = 75 \cdot k(75) = 75 \cdot 3 = 225$;
- em $n = 81$: $S(81) = 81 \cdot k(81) = 81 \cdot 2 = 162$;
- em $n = 135$: $S(135) = 135 \cdot k(135) = 135 \cdot 4 = 540$;
- em $n = 225$: $S(225) = 225 \cdot k(225) = 225 \cdot 3 = 675$;
- em $n = 405$: $S(405) = 405 \cdot k(405) = 405 \cdot 2 = 810$;
- em $n = 675$: $S(675) = 675 \cdot k(675) = 675 \cdot 2 = 1350$;
- em $n = 2025$: $S(2025) = 2025 \cdot k(2025) = 2025 \cdot 1 = 2025$.

LINHAS (DIVISORES DE 2025)	COLUNAS (MÚLTIPLOS DE 45)						TOTAL POR LINHA
	45	**135**	**225**	**405**	**675**	**2025**	
1	1	1	1	1	1	1	**6**
3	3	3	3	3	3	3	**18**
5	5	5	5	5	5	5	**30**
9	9	9	9	9	9	9	**54**
15	15	15	15	15	15	15	**90**
25	0	0	25	0	25	25	**75**
27	0	0	0	27	27	27	**81**
45	45	45	45	45	45	45	**270**
75	0	0	75	0	75	75	**225**
81	0	0	0	81	0	81	**162**
135	0	135	0	135	135	135	**540**
225	0	0	225	0	225	225	**675**
405	0	0	0	405	0	405	**810**
675	0	0	0	0	675	675	**1350**
2025	0	0	0	0	0	2025	**2025**

Logo, a soma de todos os números contidos nessas colunas múltiplas de 45 é

$$\begin{aligned}\sum_{n\in L} S(n) &= 6+18+30+54+90+75+81+270+225 \\ &+ 162+540+675+810+1350+2025 \\ &= 6411.\end{aligned}$$

5. Considere os polinômios $P(x) = (x+1)^{45}$ e $Q(x) = P(x) - k(x-1)^r$, onde k e r são números naturais tais que $k \cdot 2^r = 1981$.

(a) Determine os valores de k e r que satisfazem a condição e o grau do polinômio $Q(x)$. Justifique sua resposta.

Solução:

Temos a relação $k \cdot 2^r = 1981$. Observando a fatoração de 1981, obtemos $1981 = 7 \cdot 283$ e

$$k = \frac{7 \cdot 283}{2^r}.$$

Como 2^r é uma potência de 2, qualquer valor de $r \geq 1$ faria com que 2^r fosse par. Multiplicar um número par por k resultaria em um número par, o que não poderia ser igual a 1981 (ímpar). Assim, a única possibilidade é $2^r = 1$, isto é, $r = 0$. Consequentemente,

$$k = \frac{7 \cdot 283}{2^r} = \frac{1981}{2^0} = 1981.$$

Logo, o par (k, r) que satisfaz a condição é $(k, r) = (1981, 0)$.

Com isso, o polinômio $Q(x)$ é da forma

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) - k(x-1)^r \\ &= (x+1)^{45} - 1981 \cdot (x-1)^0 \\ &= (x+1)^{45} - 1981. \end{aligned}$$

Como subtrair uma constante de $P(x)$ não altera o grau do polinômio, concluímos que o grau do polinômio $Q(x)$ é 45, isto é, $gr(Q) = 45$.

(b) Determine a diferença entre o produto e a soma das raízes do polinômio $Q(x)$, considerando suas multiplicidades.

Solução:

O polinômio Q é dado por:

$$Q(x) = (x+1)^{45} - 1981.$$

Expandindo $(x+1)^{45}$ pelo teorema do binômio, obtemos:

$$(x+1)^{45} = \binom{45}{0}x^{45} + \binom{45}{1}x^{44} + \binom{45}{2}x^{43} + \cdots + \binom{45}{43}x^2 + \binom{45}{44}x + \binom{45}{45}.$$

Portanto,

$$Q(x) = \binom{45}{0}x^{45} + \binom{45}{1}x^{44} + \binom{45}{2}x^{43} + \cdots + \binom{45}{43}x^{2} + \binom{45}{44}x + \binom{45}{45} - 1981.$$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{45}$ raízes desse polinômio. Pelas Relações de Girard, temos que:

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{45} = -\frac{a_{44}}{a_{45}} \quad \text{e} \quad P = x_1 \cdot x_2 \cdots x_{45} = (-1)^{45} \cdot \frac{Q(0)}{a_{45}}.$$

Identificando os coeficientes pelo desenvolvimento binomial:

$$\begin{aligned} a_{45} &= \binom{45}{0} = \frac{45!}{0! \cdot (45-0)!} = \frac{45!}{0! \cdot 45!} = 1, \\ a_{44} &= \binom{45}{1} = \frac{45!}{1! \cdot (45-1)!} = \frac{45!}{1! \cdot 44!} = \frac{45 \cdot 44!}{44!} = 45, \\ Q(0) &= (0+1)^{45} - 1981 = 1^{45} - 1981 = -1980, \end{aligned}$$

obtemos

$$S = -\frac{a_{44}}{a_{45}} = -\frac{45}{1} = -45 \quad \text{e} \quad P = (-1)^{45} \cdot \frac{Q(0)}{a_{45}} = -\frac{(-1980)}{1} = 1980.$$

Dessa forma, segue que a diferença entre o produto e a soma das raízes do polinômio $Q(x)$, considerando suas multiplicidades, é dada por $P - S = 1980 - (-45) = 1980 + 45 = 2025$.

6. Considere o número de sete dígitos

$$N = 8ab4cde,$$

onde a, b, c, d e e são algarismos de 0 a 9. Sabe-se que:

(I) N é divisível por 4, 9 e 11;
(II) o algarismo $b = k \cdot e \neq 0$, com k inteiro positivo par;
(III) o algarismo c é ímpar e o maior possível sob essas restrições.

Com base nisso, responda:

(a) Determine todos os possíveis pares (b, e).

Solução:

Da comdição (II), escrevemos $b = k \cdot e \neq 0$, com k inteiro positivo par. Logo, b é par. Como N deve ser divisível por 4, então e deve ser par também. Além disso, b é um algarismo $(0 \leq b \leq 9)$ e $e \neq 0$, pois $b = k \cdot e \neq 0$ e $k > 0$.

Assim, $e \in \{2, 4, 6, 8\}$ e $b = k \cdot e \leq 9$, com $k \in \{2, 4, 6, ...\}$.

Testando caso a caso:

(1) se $e = 2$: $k = 2 \Rightarrow b = 4$ (válido); $k = 4 \Rightarrow b = 8$ (válido); $k \geq 6 \Rightarrow b \geq 12$ (inválido);

(2) se $e = 4$: $k = 2 \Rightarrow b = 8$ (válido); $k \geq 4 \Rightarrow b \geq 16$ (inválido);

(3) se $e = 6$: mesmo com $k = 2$, $b = 12$ (inválido);

(4) se $e = 8$: mesmo com $k = 2$, $b = 16$ (inválido).

Logo, os possíveis pares são $(b, e) \in \{(4, 2), (8, 2), (8, 4)\}$.

(b) Determine o valor exato do algarismo c para o qual todas as condições são satisfeitas. Justifique sua resposta.

Solução:

Pela condição (III), sabemos que o algarismo c é ímpar: $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Para maximizar c, basta verificar se há solução com $c = 9$ (o maior dígito ímpar). Existindo ao menos uma solução para $c = 9$, então esse valor de c é admissível e maximal.

Primeiro, lembre-se dos critérios de divisibilidade:

- N é divisível por 4 se, e somente se, 4 divide o número formado pelos dois últimos algarismos de N, isto é,

  $$10d + e \equiv 0 \pmod 4,$$

  ou ainda,

  $$2d + e \equiv 0 \pmod 4,$$

  pois $10 \equiv 2 \pmod 4$.

- N é divisível por 9 se, e somente se, 9 divide a soma dos algarismos de N, ou seja,

  $$8 + a + b + 4 + c + d + e \equiv 0 \pmod 9,$$

  ou ainda,

  $$a + b + c + d + e \equiv -12 \equiv 6 \pmod 9.$$

- N é divisível por 11 se, e somente se, 11 divide a soma e diferença alternada dos algarismos de N (da direita para a esquerda), ou seja,

  $$e - d + c - 4 + b - a + 8 \equiv 0 \pmod{11},$$

  ou ainda,

  $$(b + c + e) - (a + d) + 4 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Agora, fixando $c = 9$, a partir de cada par (b, e) determinado no item anterior, vejamos se existem valores de (a, d) que satisfaçam as condições de divisibilidade. Antes, lembre-se de que, como a e d são algarismos, vale $a + d \leq 18$.

- Para $(b, e) = (4, 2)$: queremos encontrar (a, d) tal que:

  $$\begin{cases} 2d + 2 \equiv 0 \pmod 4 \\ a + 4 + 9 + d + 2 \equiv 6 \pmod 9 \\ (4 + 9 + 2) - (a + d) + 4 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

  Ou equivalentemente,

  $$\begin{cases} 2d + 2 \equiv 0 \pmod 4 \quad (1) \\ a + d \equiv -9 \equiv 0 \pmod 9 \quad (2) \\ a + d \equiv 19 \equiv 8 \pmod{11} \quad (3) \end{cases}$$

  As congruências (2) e (3) levam a resolver $a + d = 9x = 11y + 8$, com $x, y \geq 0$ inteiros. O menor valor que satisfaz simultaneamente essas duas expressões é $a + d = 63$, obtidos para $x = 7$ e $y = 5$.

Como esse resultado excede o limite $a + d \leq 18$, concluímos que não há solução possível para o par $(b, e) = (4, 2)$.

- Para $(b, e) = (8, 2)$: queremos encontrar (a, d) tal que:

$$\begin{cases} 2d + 2 \equiv 0 \pmod 4 \\ a + 8 + 9 + d + 2 \equiv 6 \pmod 9 \\ (8 + 9 + 2) - (a + d) + 4 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{cases} 2d + 2 \equiv 0 \pmod 4 \quad (4) \\ a + d \equiv -13 \equiv 5 \pmod 9 \quad (5) \\ a + d \equiv 23 \equiv 1 \pmod{11} \quad (6) \end{cases}$$

De (5) e (6), precisamos resolver $a+d = 9r+5 = 11s+1$, com $r, s \geq 0$ inteiros, ou seja, estamos procurando um número que seja ao mesmo tempo congruente a $5 \pmod 9$ e a $1 \pmod{11}$. O menor valor que satisfaz simultaneamente essas duas condições é $a + d = 23$, obtido para $r = s = 2$.

Como a e d são algarismos, temos $a+d \leq 18$. O valor obtido, $a+d = 23$, excede esse limite, tornando impossível encontrar (a, d) que satisfaça todas as condições para o par $(b, e) = (8, 2)$.

- Para $(b, e) = (8, 4)$: queremos encontrar (a, d) tal que:

$$\begin{cases} 2d + 4 \equiv 0 \pmod 4 \\ a + 8 + 9 + d + 4 \equiv 6 \pmod 9 \\ (8 + 9 + 4) - (a + d) + 4 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{cases} 2d \equiv 0 \pmod 4 \quad (7) \\ a + d \equiv -15 \equiv 3 \pmod 9 \quad (8) \\ a + d \equiv 25 \equiv 3 \pmod{11} \quad (9) \end{cases}$$

Da congruência (9), temos $2d \equiv 0 \pmod 4$, o que implica $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Já pelas congruências (8) e (9), obtemos $a + d = 9u + 3 = 11v + 3$, com $u, v \geq 0$. A menor solução inteira ocorre para $x = y = 0$, resultando em $a + d = 3$.

Como $a + d = 3$, segue que $d \leq 3$, logo $d = 0$ ou $d = 2$. Se $d = 0$, temos $a = 3$. Por outro lado, se $d = 2$, então $a = 1$.

Portanto, os possíveis pares são $(a, d) \in \{(3, 0), (1, 2)\}$.

Portanto, analisando todos os pares (b, e) possíveis, verificamos que apenas $(b, e) = (8, 4)$ admite combinações de (a, d) que satisfazem simultaneamente todos os critérios de divisibilidade. Como escolhemos $c = 9$, o maior algarismo ímpar admissível, e existem valores de (a, d) compatíveis, concluímos que $c = 9$ é o valor exato de c que atende a todas as condições impostas

(c) Determine o maior valor de N. Justifique sua resposta.

Solução:

A partir do item anterior, sabemos que o maior algarismo ímpar admissível é $c = 9$. Além disso, apenas o par $(b, e) = (8, 4)$ permite combinações de (a, d) compatíveis com todas as condições de divisibilidade, sendo $(a, d) \in \{(3, 0), (1, 2)\}$.

Para determinar o maior valor de N, devemos escolher os algarismos de forma a maximizar cada posição de maior peso. Assim, selecionamos $(a, d) = (3, 0)$, obtendo o número de sete dígitos $N = 8384904$, que satisfaz todas as restrições do problema.