



**OPRM 2025**  
**Nível 3 (Ensino Médio)**  
**Primeira Fase**  
**13 ou 14 de junho**  
**Duração: 2 horas e 30 minutos**

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Escola:** \_\_\_\_\_

**Fiscal:** \_\_\_\_\_

---

### INSTRUÇÕES

- Escreva o seu nome, o nome da sua escola e o nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 8 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou algum problema faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta a qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Você pode fazer seus cálculos e anotações ao longo deste caderno de questões. Além disso, há uma página de rascunho no verso da prova.
- As respostas finais devem ser marcadas **com cuidado** na Folha de Respostas.
- Só serão consideradas as respostas assinaladas na Folha de Respostas. O que você escrever neste caderno de questões ou em folhas de rascunho não será considerado para fins de avaliação.
- Ao finalizar a prova, entregue ao **FISCAL** a Folha de Respostas, o caderno de questões e as folhas de rascunho que você eventualmente tenha usado.

**BOA PROVA!**

1. Determine a quantidade de soluções da equação  $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) = -1$ , com  $x \in [0, 2\pi)$ .

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) ► 3.**
- (D) Infinitas.
- (E) Nenhuma.

2. Sejam  $a$  e  $b$  inteiros positivos tais que  $\text{mdc}(a, b) = 8$  e  $\text{mmc}(a, b) = 8a^2$ . Sabendo disso, determine o valor de  $a^2 + b$

- (A) 601.
- (B) 64.
- (C) ► 576.**
- (D) 592.
- (E) 610.

3. Uma empresa possui 50 funcionários fixos. O setor de Recursos Humanos pretende organizar comemorações mensais para os aniversariantes e, para isso, analisou a distribuição dos aniversários ao longo dos 12 meses do ano. Em relação às datas de aniversário dos funcionários, assinale a alternativa correta:

- (A) Cada mês possui, no máximo, 4 aniversariantes.
- (B) ► Ao menos um mês tem 5 ou mais aniversariantes.**
- (C) Todos os funcionários fazem aniversário em dias diferentes.
- (D) Pelo menos três dos funcionários fazem aniversário no dia 30 de algum mês.
- (E) Nenhuma das alternativas anteriores está correta.

4. Considere a equação cúbica

$$x^3 - 21x^2 + 126x - 216 = 0.$$

Sabe-se que as três raízes reais  $x_1, x_2, x_3$  dessa equação são distintas e formam, nessa ordem, três termos consecutivos de uma progressão geométrica crescente de razão  $r > 1$ .

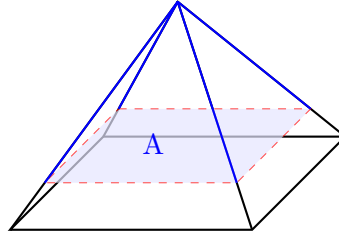
Com base nessas informações, determine o valor da expressão:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5r.$$

- (A) 76.
- (B) 78.
- (C) 79.
- (D) ► 82.**
- (E) 83.

5. Uma pirâmide regular reta de base quadrada possui volume  $V = 16$  u.v. e sua altura coincide com o lado da base. Um plano paralelo à base divide a pirâmide em dois sólidos de volumes iguais. A área  $A$  do quadrado menor, formado pela interseção do plano com a pirâmide, é igual a:

- (A)  $4\sqrt[3]{2}$ .  
 (B)  $\blacktriangleright 4\sqrt[3]{9}$ .  
 (C) 8.  
 (D) 4.  
 (E)  $2\sqrt[3]{3}$ .



6. Em sua jornada pela Terra-Média, o jovem elfo Elenion precisa atravessar a Floresta de Lothlórien. Ao fim de uma trilha, ele encontra duas passagens ocultas por névoa: uma leva à segurança de Valfenda; a outra, a uma armadilha dos orcs.

Na clareira entre as duas passagens, três figuras o aguardam: Galdor, um guardião cinzento; Lindoriel, uma elfa misteriosa; e Baragorn, um viajante do sul. Um deles é leal a Galadriel, a poderosa senhora élfica que protege Lothlórien com sua sabedoria e magia. Todos os que são leais a ela sempre dizem a verdade. Os outros dois, porém, estão enfeitados por Saruman, o Mago Branco que se aliou às trevas. Suas palavras nunca são verdadeiras, mesmo que soem convincentes.

Ao perguntar qual caminho é seguro, Elenion ouviu as seguintes respostas:

- Galdor: “Se Lindoriel estiver sob feitiço, então a trilha da esquerda é segura.”
- Lindoriel: “Baragorn e eu não somos leais à mesma pessoa.”
- Baragorn: “A trilha da direita é uma armadilha, e eu sou leal a Galadriel.”

Sabendo que apenas um deles diz a verdade, qual caminho Elenion deve seguir?

- (A)  $\blacktriangleright$  trilha da esquerda leva a Valfenda.  
 (B) A trilha da direita leva a Valfenda.  
 (C) Ambas as trilhas são armadilhas.  
 (D) Ambas as trilhas são seguras..  
 (E) Nenhuma das alternativas

7. Seja  $x$  um ângulo no primeiro quadrante tal que  $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . Determine o valor de  $\cos 3x$ .

- (A)  $\frac{22}{27}$ .  
 (B)  $-\frac{5}{9}$ .  
 (C)  $\frac{4\sqrt{5}}{27}$ .  
 (D)  $-\frac{8}{27}$ .  
 (E)  $\blacktriangleright -\frac{22}{27}$ .

8. Determine o valor da soma:

$$\sum_{k=1}^{16383} \log_2 \left( \frac{k+1}{k} \right)$$

- (A) 11.
- (B) 12.
- (C) 13.
- (D) ► 14.**
- (E) 15.

9. O engenheiro André tem 9 tipos diferentes de sensores e precisa escolher 5 deles para compor um novo protótipo. No entanto, dois desses sensores não podem ser utilizados juntos, pois geram interferência eletromagnética perigosa. Determine de quantas maneiras diferentes ele pode selecionar os 5 sensores, respeitando essa restrição.

- (A) 70 maneiras.
- (B) 73 maneiras.
- (C) 79 maneiras.
- (D) 82 maneiras.
- (E) ► 91 maneiras.**

10. Determine quantos números inteiros positivos  $n$  tornam a seguinte expressão um número inteiro:

$$\frac{n^2 + 5n + 24}{n + 2}$$

- (A) Nenhum.
- (B) 2.
- (C) 5.
- (D) ► 4.**
- (E) 8.

11. O Homem-Formiga, em sua versão minúscula, está tentando medir a altura de um prédio. Inicialmente, ele vê o topo do prédio sob um ângulo de  $30^\circ$ . Após caminhar 30 m em direção ao prédio, o ângulo de elevação aumenta para  $45^\circ$ . Utilizando  $\sqrt{3} \approx 1,73$ , a altura do prédio é de aproximadamente:

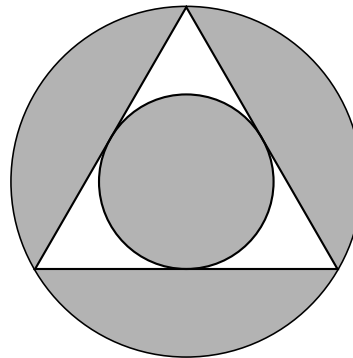
- (A) 27m.
- (B) 33m.
- (C) ► 41m.**
- (D) 45m.
- (E) 52m.

12. Um cofre eletrônico exige a digitação de uma senha de quatro dígitos, que podem ser escolhidos de 1 a 9. Ao cadastrar uma nova senha no cofre, qual é a probabilidade de ela possuir pelo menos um dígito repetido?

- (A) 28,54%.
- (B) 37,12%.
- (C) 46,09%.
- (D) ► 53,91%.**
- (E) 68,30%.

13. Sabendo que o triângulo ABC é equilátero com lado 6, e as circunferências são inscrita e circunscrita ao triângulo, a área em cinza é igual a:

- (A) ►  $15\pi - 9\sqrt{3}$ .**
- (B)  $21\pi - 9\sqrt{3}$ .
- (C)  $12\pi - 9\sqrt{3}$ .
- (D)  $15\pi - 27$ .
- (E)  $24\pi - 9\sqrt{3}$ .



14. Seja  $N = 3aaaa6$ , onde  $a$  representa um dígito entre 0 e 9. Determine o valor de  $a$  para que  $N$  seja divisível por 24.

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) ► 3.**
- (D) 4.
- (E) 5.

15. Seja  $f(x) = x^2 + bx + c$  um polinômio de segundo grau tal que:

- O resto da divisão de  $f(x)$  por  $x - 5$  é 2.
- O resto da divisão de  $f(x)$  por  $x - 4$  é 3.

Determine o valor da soma  $b + c$ .

- (A) 15.
- (B) ► 17.**
- (C) 21.
- (D) 25.
- (E) 29.

16. Em um triângulo retângulo, o ângulo agudo  $\beta$  satisfaz:

$$\tan \beta = \frac{5}{12}$$

Sabendo disso, determine o valor de  $\cos \beta$ .

- (A)  $\frac{13}{12}$ .      (B)  $\frac{5}{13}$ .      (C)  $\frac{12}{5}$ .      **(D) ►  $\frac{12}{13}$ .**      (E)  $\frac{5}{12}$ .

17. Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$  que satisfazem a equação

$$(x - 2025)^{2024} + |2026 - y| = 0.$$

Determine o valor da soma

$$(y - x)^0 + (y - x)^1 + (y - x)^2 + \cdots + (y - x)^{2025}.$$

- (A) 1022.  
(B) 2024.  
(C) 2025.  
**(D) ► 2026.**  
(E) Nenhuma das alternativas anteriores está correta.

18. Em um carrinho de picolés, um vendedor precisa organizar 15 picolés entre três sabores: morango, limão e uva. Por exigência dos clientes, ele sempre leva pelo menos 2 picolés de morango. Determine o número de maneiras diferentes de escolher a quantidade de cada sabor, sabendo que a soma total deve ser exatamente 15 picolés e que todas as quantidades devem ser inteiras não negativas.

- (A) 91.  
**(B) ► 105.**  
(C) 107.  
(D) 109.  
(E) Nenhuma das alternativas está correta.

19. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, dada por  $f(x) = 2x + 2$ . A raiz da função

$$f(f(\dots f(x) \dots)),$$

em que  $f$  é aplicada 2025 vezes, é:

(A)  $\blacktriangleright -2 + \frac{1}{2^{2024}}$ .

(B)  $-2 + \frac{1}{2^{2025}}$ .

(C)  $2 + \frac{1}{2^{2024}}$ .

(D)  $-2 + \frac{1}{2^{2026}}$ .

(E)  $2 + \frac{1}{2^{2025}}$ .

20. Considere um quadrado cuja área é 32 u.a.. A partir de um de seus vértices, constrói-se um setor circular com raio igual ao lado do quadrado e centro nesse vértice, formando um ângulo de  $90^\circ$ . No vértice oposto do quadrado, constrói-se outro setor circular, também com ângulo de  $90^\circ$ , cujo centro é esse vértice e cujo raio é tal que a borda desse segundo setor seja tangente à borda do primeiro setor. Qual é a área do quadrado que não está coberta por nenhum dos dois setores circulares?

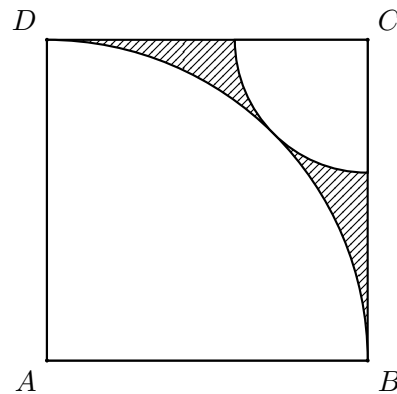
(A)  $\blacktriangleright 32 - 32\pi + 16\sqrt{2}\pi$ .

(B)  $32 - 8\pi$ .

(C)  $32 - 10\pi + \sqrt{2}\pi$ .

(D)  $32 + 32\pi - 16\sqrt{2}\pi$ .

(E)  $32 - 16\pi + 8\sqrt{2}\pi$ .



**RASCUNHO**