OPRM2023
Olimpíada Paranaense de Matemática

1. Seja $x_1, x_2, \ldots x_n$ uma lista com $n$ números inteiros. Sabendo que a soma de todos eles resulta em zero e o produto resulta em $-1$, isto é, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ e $x_1 x_2 \ldots x_n = -1$, faça o que se pede:

   (a) Quais são os possíveis valores para $x_1, x_2, \ldots x_n$?

   **Solução:**
   Como

   $$1 = |-1| = |x_1 x_2 \cdots x_n| = |x_1||x_2| \cdots |x_n|$$

   e cada $x_i \in \mathbb{Z}$, então $|x_i| = 1$, ou seja, os termos $x_i$ podem ser 1 ou $-1$.
   Como

   $$x_1 x_2 \cdots x_n = -1$$

   precisamos que alguns dos termos $x_i$ sejam $-1$.
   Como

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

   precisamos que hajam termos iguais a 1 na sequência.

   Logo, $x_i \in \{-1, 1\}$, $\forall i = 1, 2, \cdots n$.

   (b) Determine o resto da divisão de $n$ por 2.

   **Solução:**
   Chamando de $I$ a quantidade de termos $x_i$ iguais a $-1$ e $P$ a quantidade de termos iguais à 1, vamos ter:

   $$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ &= P - I \end{aligned}$$

   ou seja, $P = I$, então $n = P + I = 2I$. Então o resto da divisão de $n$ por 2 é 0.

(c) Determine o resto da divisão de $n$ por 4.

**Solução:**
Como

$$\begin{aligned} -1 &= x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \\ &= 1^P \cdot (-1)^I \\ &= (-1)^I \end{aligned}$$

então $I$ é um número ímpar da forma $I = 2m + 1$.
Então

$$P = I = 2m + 1$$

e

$$n = P + I = 2 \cdot (2m + 1) = 4m + 2$$

Ou seja, o resto da divisão de $n$ por 4 é 2.

(d) Quantas vezes, em função de $n$, cada valor possível apareceria na lista $x_1, x_2, \ldots x_n$?

**Solução:**
Como

$$n = P + I = 2I = 2P,$$

então

$$P = I = \frac{n}{2}.$$

2. Amanda está preparando uma festa de aniversário para a sua filha e está precisando de ajuda. Ajude Amanda respondendo os itens a seguir.

   (a) Amanda quer montar um bolo no formato de um prisma hexagonal regular com altura de 10 cm e aresta da base de 24 cm. Sabendo que ela vai colocar creme de chantilly em toda superfície do bolo (laterais e topo), qual é o valor da área que será coberta por creme de chantilly?

**Solução:**
A área que será coberta por creme de chantilly é a soma da área do topo com a área lateral. Seja $b = 24$ cm e $h = 10$ cm. A área lateral é dada por:

$$\begin{aligned} A_l &= 6 \cdot b \cdot h \\ &= 6 \cdot 24 \cdot 10 \\ &= 1440 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

A área do topo é dada por:

$$\begin{aligned} A_t &= 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \\ &= 6 \cdot \frac{24^2\sqrt{3}}{4} \\ &= 6 \cdot \frac{576\sqrt{3}}{4} \\ &= 864\sqrt{3} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Logo, o valor da área que será coberta por creme de chantilly é de:

$$A_l + A_t = 1440 + 864\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

(b) Amanda decidiu encomendar 150 docinhos para a festa. As opções para os docinhos são: brigadeiro, beijinho, dois amores, cajuzinho, trufa, e bicho de pé. De quantos modos diferentes Amanda pode efetuar esta encomenda?

**Solução:**

Calcular a quantidade de modos diferentes que Amanda pode efetuar esta encomenda é equivalente a calcular a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação: $a+b+c+d+e+f=150$. Basta calcular as permutações entre os cinco sinais de $+$ e os 150 docinhos. Temos:

$$\begin{aligned} P_{155}^{150,5} &= \frac{155!}{150! \cdot 5!} \\ &= \frac{155 \cdot 154 \cdot 153 \cdot 152 \cdot 151}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 31 \cdot 77 \cdot 51 \cdot 38 \cdot 151 \\ &= 698.526.906. \end{aligned}$$

Logo, Amanda pode efetuar esta encomenda de 698.526.906 modos diferentes.

3. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ que satisfaz:

$$\begin{cases} f(1) = 0. & \\ f(p) = 1, & \text{se } p \text{ é um número primo.} \\ f(a \cdot b) = f(a) + f(b), & \text{para todo } a, b \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Calcule $f(7), f(12), f(100)$ e $f(625)$.

**Solução:**

$$\begin{aligned} f(7) &= 1. \\ f(12) &= f(3 \cdot 2^2) \\ &= f(3) + f(2^2) = f(3) + f(2) + f(2) = 3. \\ f(100) &= f(5^2 \cdot 2^2) = f(5^2) + f(2^2) \\ &= f(5) + f(5) + f(2) + f(2) = 4. \\ f(625) &= f(5^2 \cdot 5^2) = f(5^2) + f(5^2) \\ &= f(5) + f(5) + f(5) + f(5) = 4. \end{aligned}$$

(b) Vamos chamar de $S_n$ o conjunto dos números inteiros $m \in \mathbb{N}$ tais que $f(m) = n$. Por exemplo, $S_1$ seria composto apenas por números primos, pois se $p$ é primo, então $f(p) = 1$. Determine os 3 menores valores de $S_2$, de $S_3$ e de $S_4$.

**Solução:**
O Teorema Fundamental da Aritimética nos diz que todo número $n > 1$ pode ser decomposto como produto de potências de primos:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}) \\ &= f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) = \cdots + f(p_m^{\alpha_m}) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \end{aligned}$$

Então, $S_k$ é o conjunto dos números $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = k$
Então os menores elementos de $S_2$ são $4, 6$ e $9$

$$\begin{aligned} f(4) &= f(2^2) = 2 \\ f(6) &= f(2 \cdot 3) = 2 \\ f(9) &= f(3^2) = 2. \end{aligned}$$

Os menores elementos de $S_3$ são $8, 12$ e $18$

$$\begin{aligned} f(8) &= f(2^3) = 3 \\ f(12) &= f(2^2 \cdot 3) = 3 \\ f(18) &= f(2 \cdot 3^2) = 3. \end{aligned}$$

Os menores elementos de $S_4$ são $16, 24$ e $36$

$$\begin{aligned} f(16) &= f(2^4) = 4 \\ f(24) &= f(2^2 \cdot 3^2) = 4 \\ f(36) &= f(2^2 \cdot 3^2) = 4. \end{aligned}$$

(c) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o menor elemento de $S_n$ é $2^n$.

**Solução:**
Seja
$$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} \in S_n$$
isto é, $\alpha_1 + \alpha_2 \cdots \alpha_m = n$.

Como 2 é o menor número primo, então $2 \leq p_i$, $\forall i = 1, 2, \cdots m$.
Então
$$2^{\alpha_i} \leq p_i^{\alpha_i}$$
$$2^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \cdots 2^{\alpha_m} \leq p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots p_m^{\alpha_m}$$
$$2^n \leq k$$
para todo $k \in S_n$, ou seja, $2^n$ é o menor elemento de $S_n$.

4. Considere as funções polinomiais $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $f(x) = x^7 - 1$ e $g(x) = x - 1$. Seja $h(x)$ o quociente da divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

   (a) Calcule $h(x)$.

   **Solução:**
   Utilizando o método da chave, temos:

$$
\begin{array}{r|l}
x^7 \qquad\qquad\qquad\qquad -1 & x-1 \\
\hline
-x^7+x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\
x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & \\
-x^6+x^5 \qquad\qquad\qquad\quad & \\
x^5 \qquad\qquad\qquad\quad & \\
-x^5+x^4 \qquad\qquad\quad & \\
x^4 \qquad\qquad\quad & \\
-x^4+x^3 \qquad\quad & \\
x^3 \qquad\quad & \\
-x^3+x^2 \quad & \\
x^2 \quad & \\
-x^2+x \quad & \\
x-1 & \\
-x+1 & \\
0 &
\end{array}
$$

   Logo, $h(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

   (b) Determine as soluções de $h(x) = 0$.

   **Solução:**
   Como $h(x) = \dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$, então as soluções de $h(x) = 0$ são as raízes sétimas da unidade, com exceção do 1. Logo, as soluções são:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{7}\right),\ k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(c) Calcule o resto da divisão de $h(x^{2023})$ por $h(x)$.

**Solução:**
Considere a equação $h(x^{2023}) = q(x)h(x) + r(x)$. Queremos determinar $r(x)$.
Pelo item anterior, vimos que as soluções de $h(x) = 0$ são:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{7}\right),\ k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Seja $x_1 = \omega$. Pela fórmula de De Moivre, temos $x_k = \omega^k$ para $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Lembre-se também que $\omega^7 = 1$, visto que $x_1 = \omega$ é raiz sétima da unidade. Tomando $x = \omega^k$ na equação $h(x^{2023}) = q(x)h(x) + r(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& q(x)h(x) + r(x) = h(x^{2023}) \\
\Longrightarrow\ & q(\omega^k)h(\omega^k) + r(\omega^k) = h(\omega^{2023k}) \\
\Longrightarrow\ & q(\omega^k) \cdot 0 + r(\omega^k) = h((\omega^7)^{289k}) \\
\Longrightarrow\ & r(\omega^k) = h(1^{289k}) \\
\Longrightarrow\ & r(\omega^k) = h(1) \\
\Longrightarrow\ & r(\omega^k) = 7,\ k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
\Longrightarrow\ & r(\omega^k) - 7 = 0,\ k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.
\end{aligned}$$

Note que $r(x) - 7 = 0$ tem pelo menos seis raízes distintas, o que é contradição, visto que o grau de $h(x)$ é seis e, portanto, o grau de $r(x)$ é no máximo cinco. Logo, $r(x)$ deve ser constante e então $r(x) = 7$.

5. Estudando provas anteriores da OPRM, Hugo se deparou com a sequência de Fibonacci, uma sequência de números que se dava da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_0 = 0. \\ F_1 = 1. \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Pesquisando um pouco mais sobre a sequência, descobriu que a seguinte fórmula nos ajudava a calcular cada elemento da sequência:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Sabendo dessa fórmula, faça o que se pede.

(a) Verifique que tal fórmula funciona para os 4 primeiros termos da sequência.

**Solução:**

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \\
F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\
F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4\sqrt{5}}(1+2\sqrt{5}+5) - \frac{1}{4\sqrt{5}}(1-2\sqrt{5}+5) = 1 \\
F_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8\sqrt{5}}(1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5}) - \frac{1}{8\sqrt{5}}(1-3\sqrt{5}+3\cdot 5-5\sqrt{5}) = 2
\end{aligned}$$

(b) Prove que a fórmula funciona para todo elemento da sequência.

**Solução:**
Mostramos que ela é válida para os 2 primeiros termos. Vamos mostrar, por indução forte, que ela é válida para os demais.

Suponha que a fórmula funcione para todo $i \leq n+1$.

Então

$$
\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}
\end{aligned}
$$

ou seja, a fórmula é válida para $n+2$.

Então, por indução forte, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que $F_{2^n}$ é múltiplo de 3 para todo $n \geq 2$.

**Solução:**
No caso de $n = 2$, temos que $F_{2^n} = F_4 = 3$.

Vamos supor, por indução, que $F_{2^n}$ seja múltiplo de 3 para algum $n \geq 2$.
Vamos chamar

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

e

$$m = 2^n$$

Então

$$\begin{aligned}
F_{2^{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2^{n+1}} - \beta^{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2\cdot 2^n} - \beta^{2\cdot 2^n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2m} - \beta^{2m}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^m - \beta^m\right)\left(\alpha^m + \beta^m\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2^n} - \beta^{2^n}\right)\left(\alpha^m + \beta^m\right) \\
&= F_{2^n}\left(\alpha^m + \beta^m\right)
\end{aligned}$$

Então $F_{2^{n+1}}$ é múltiplo de $F_{2^n}$.
Pela hipótese, $F_{2^n}$ é múltiplo de 3, então $F_{2^{n+1}}$ também é múltiplo de 3.

Por indução, temos que $F_{2^n}$ é múltiplo de 3 para todo $n \geq 2$.

6. O *somatório* é uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de parcelas. A notação matemática $\Sigma$ é utilizada para representar o somatório:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

De forma similar, o *produtório* é uma forma abreviada de escrever o produto de um conjunto de fatores. A notação matemática $\Pi$ é utilizada para representar o produtório:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n.$$

Com base nisso, faça o que se pede.

(a) Encontre $a$ e $b$ reais tais que

$$\frac{1}{4k^2 + 12k + 5} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+5}.$$

**Solução:**
Note que $4k^2 + 12k + 5 = (2k+1)(2k+5)$. Multiplicando ambos os lados da equação em questão por $4k^2 + 12k + 5$, obtemos:

$$\begin{aligned} & 1 = a(2k+5) + b(2k+1) \\ \Longrightarrow\ & 1 = 2ka + 5a + 2kb + b \\ \Longrightarrow\ & 1 = k(2a + 2b) + (5a + b). \end{aligned}$$

Obtemos assim que $2a + 2b = 0$ e $5a + b = 1$. Resolvendo o sistema dado por estas equações, obtemos que $a = \dfrac{1}{4}$ e $b = -\dfrac{1}{4}$.

(b) Mostre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2023} \frac{44}{4k^2+12k+5} < \frac{88}{15}$.

**Solução:**
Utilizando a decomposição encontrada no item anterior juntamente com somas telescópicas, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2023} \frac{44}{4k^2+12k+5} &= \sum_{k=1}^{2023} \left( \frac{44}{4(2k+1)} - \frac{44}{4(2k+5)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{2023} \left( \frac{11}{2k+1} - \frac{11}{2k+5} \right) \\
&= \frac{11}{3} - \frac{11}{7} + \frac{11}{5} - \frac{11}{9} + \cdots + \frac{11}{4045} - \frac{11}{4049} + \frac{11}{4047} - \frac{11}{4051} \\
&= \frac{11}{3} + \frac{11}{5} - \frac{11}{4049} - \frac{11}{4051} \\
&= \frac{88}{15} - \frac{11}{4049} - \frac{11}{4051} \\
&< \frac{88}{15}.
\end{aligned}$$

(c) Mostre que $\displaystyle\prod_{k=1}^{2023} \frac{4k^2+14k+10}{4k^2+12k+5} = 2^{4047} \cdot \frac{(2024!)^2}{4048!}$.

**Solução:**

Temos:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2023} \frac{4k^2+14k+10}{4k^2+12k+5} &= \prod_{k=1}^{2023} \frac{(2k+2)(2k+5)}{(2k+1)(2k+5)} \\
&= \prod_{k=1}^{2023} \frac{2k+2}{2k+1} \\
&= \frac{4\cdot 6\cdot 8 \cdots 4046\cdot 4048}{3\cdot 5\cdot 7\cdots 4045\cdot 4047} \\
&= 2^{2023} \cdot \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots 2023\cdot 2024}{3\cdot 5\cdot 7\cdots 4045\cdot 4047} \\
&= 2^{2023} \cdot \frac{2024!}{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 4047\cdot 4048}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 4046\cdot 4048}} \\
&= 2^{2023} \cdot \frac{2024!}{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 4047\cdot 4048}{2^{2024}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots 2023\cdot 2024}} \\
&= 2^{2023} \cdot \frac{2024!}{\frac{4048!}{2^{2024}\cdot 2024!}} \\
&= 2^{2023} \cdot \frac{2024!}{4048!} \cdot 2^{2024} \cdot 2024! \\
&= 2^{4047} \cdot \frac{(2024!)^2}{4048!}.
\end{aligned}$$