OPRM 2023
Segunda Fase
Nível 2
01/10/2023
Duração: 4 horas

1. Por volta do século 13, o matemático islâmico Ibn al-Bannā al-Marrākushī fez uma grande descoberta sobre números primos. Ele descobriu que, se quisermos saber se um número n é primo, basta checar se ele é divisível pelos números primos menores que $\sqrt{n}$. Se $\sqrt{n}$ for primo, é necessário também testar se $\sqrt{n}$ divide n. Se nenhum número primo menor ou igual a $\sqrt{n}$ dividir n, então n é primo.

   Explique por que esse procedimento funciona.

Solução:

Seja n um número inteiro maior que 1 tal que nenhum número primo menor ou igual a $\sqrt{n}$ divide n. Vamos provar por contradição que n é um número primo.

Suponha que exista um número primo p que divide n satisfazendo $n > p > \sqrt{n}$.

$\Rightarrow n = p \cdot k$, em que k é um inteiro positivo.

Sabemos que $k > \sqrt{n}$, pois caso contrário, teríamos um número primo menor que $\sqrt{n}$ dividindo n.

Ou seja:

$n = p \cdot k > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$

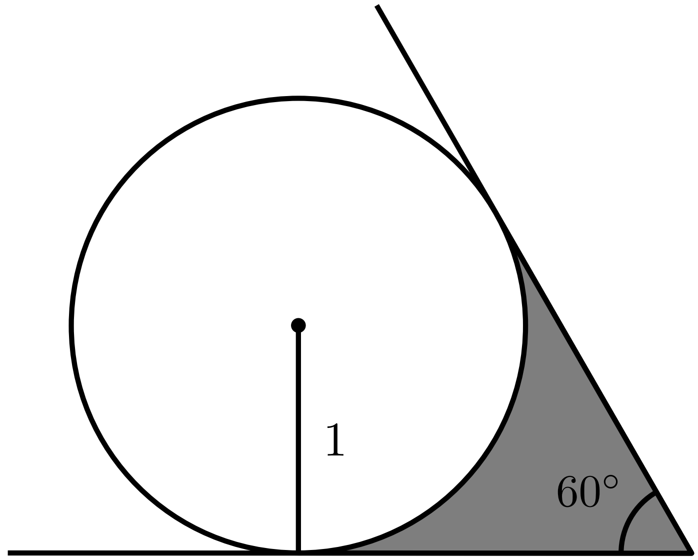
Concluímos que $n > n$, o que representa um absurdo matemático.

Isso significa que a suposição inicial estava incorreta. Isto é: não existe um número primo p satisfazendo $n > p > \sqrt{n}$ que divida n.

Como n não possui um divisor primo menor ou igual a $\sqrt{n}$ e também não possui um divisor primo que seja maior que $\sqrt{n}$, com exceção do próprio n, então os únicos divisores positivos de n são 1 e n.

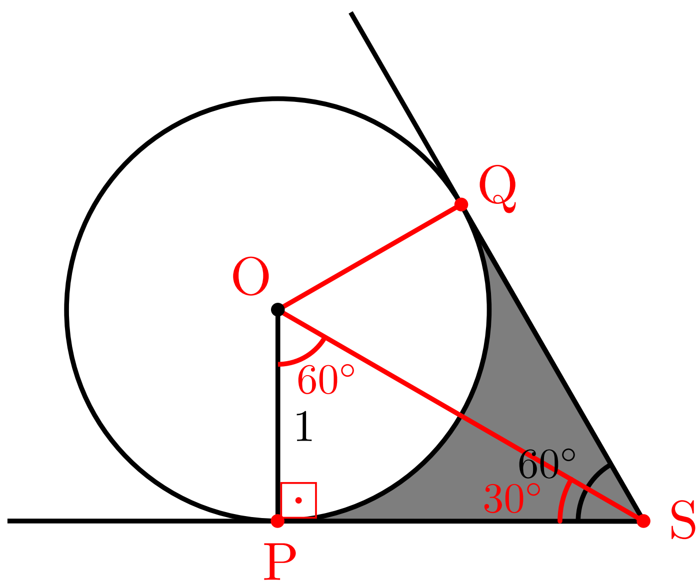
Portanto, n é um número primo.

2. Na figura abaixo, o raio do círculo é de 1 cm, os segmentos são tangentes ao círculo e formam um ângulo de 60° entre si. Calcule a área da região hachurada, em cinza.



Solução:

Começamos dando nomes aos pontos de interesse, conforme ilustrado na figura abaixo:

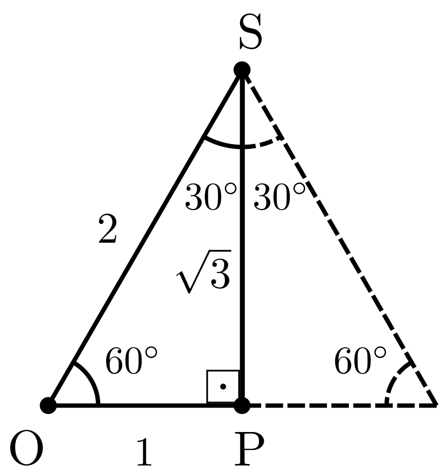


Também marcamos alguns ângulos que serão úteis no cálculo. É importante lembrar que $\angle SPO = 90°$, uma vez que o segmento SP é tangente à circunferência. A área que desejamos calcular corresponde à diferença entre a área do quadrilátero $\square OPSQ$ e a área do setor circular $\heartsuit POQ$. Vamos calcular cada uma dessas áreas:

- Para determinar a área do setor circular $\heartsuit POQ$, observe que o ângulo central $\angle POQ = 120°$ corresponde a um terço do ângulo total do círculo, que é $360°$. Portanto, a área do setor circular é um terço da área do círculo:

$$\text{Área}(\heartsuit POQ) = \frac{\pi}{3}.$$

- Agora, vamos calcular a área do quadrilátero $\square OPSQ$. Começamos determinando o comprimento do segmento $\overline{PS}$. Para fazer isso, é crucial observar os ângulos do triângulo $\triangle PSO$ e perceber que ele é metade de um triângulo equilátero, com $\overline{PS}$ como sua altura. Como $\overline{PO} = 1$, podemos concluir que $\overline{SO} = 2$ e, portanto, $\overline{PS} = \sqrt{3}$.



Com o valor de $\overline{PS}$, podemos calcular a área do triângulo $\triangle OPS$:

$$\text{Área}(\triangle OPS) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Além disso, a área do quadrilátero $\square OPSQ$ é a soma das áreas dos triângulos $\triangle OPS$ e $\triangle SOQ$:

$$\text{Área}(\square OPSQ) = \text{Área}(\triangle OPS) + \text{Área}(\triangle SOQ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Portanto, a área da região hachurada é $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

3. Uma professora de matemática inventou uma brincadeira com seus alunos. Para isso, ela definiu a operação **termial**, que é representada pelo símbolo ponto de interrogação **(?)**. A definição é a seguinte: o termial de um número é a soma deste número a todos seus antecessores naturais, isto é:

   Se n é um número natural, então $n? = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$.

   Para a brincadeira, a professora diz um número, e os alunos devem acertar qual é o número natural cujo termial mais se aproxima do número dito mas sem ultrapassá-lo.

   Exemplo: a professora disse para a turma o número 14. Temos que $4? = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$ e $5? = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Logo, a resposta que os alunos devem dar para a professora é 4.

   Em uma segunda rodada, a professora disse para a turma o número 60. Temos que $10? = 55$ e $11? = 66$. Dessa forma, os alunos devem informar que o número procurado é 10.

   a) Agora na terceira rodada, a professora diz o número 314159. Qual é o número correto que os alunos devem dar como resposta para a professora?

Solução:

Podemos encontrar padrões para facilitar nosso cálculo de termiais. Um padrão possível é o mostrado a seguir:

$n? = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$

A equação acima também pode ser escrita como:

$n? = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$

Somando as duas equações cima, somando os números logo abaixo um do outro, à esquerda obtemos $n? + n? = 2n?$ e à direita obtemos $(n+1)$ como resultado em todas as somas:

$$2n? = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ vezes}}$$

$\Rightarrow 2n? = (n+1) \cdot n$

$\Rightarrow n? = \dfrac{(n+1) \cdot n}{2}$

Dessa forma, encontramos uma fórmula para o cálculo do termial de qualquer número natural. Se queremos encontrar um número cujo termial mais se aproxima de 314159 sem ultrapassá-lo, significa que queremos encontrar um número natural n tal que:

$n? \leq 314159$.

Substituindo $n?$ pela fórmula que calculamos:

$\dfrac{(n+1) \cdot n}{2} \leq 314159$

Agora, resta a nós realizar as manipulações algébricas a fim de encontrar o vamor de n:

$\Rightarrow (n+1) \cdot n \leq 314159 \cdot 2$

$\Rightarrow (n+1)\cdot n \leq 628318$

Isto é, precisamos encontrar dois números naturais, sendo que um número é o sucessor do outro, tal que a multiplicação entre eles resulte o mais próximo possível de 628318, sem ultrapassar. Podemos começar com um teste:

$100 \cdot 101 = 10100$

Ainda está muito longe de 628318. Vamos aumentar os números significantemente:

$800 \cdot 801 = 640800$

Dessa vez, ultrapassamos. mas estamos próximos. Agora, basta ir diminuindo os números até encontrar nosso n ideal.

$795 \cdot 794 = 631230$

$794 \cdot 793 = 629642$

$793 \cdot 792 = 628056$

Encontramos! Esta é a multiplicação de dois números naturais, com o primeiro sendo sucessor do segundo, tal que o resultado mais se aproxima de 628318, sem ultrapassá-lo.

Lembramos então que o número que gostaríamos é n. Nesse caso, $n = 792$.

Observe que $792? = \dfrac{793 \cdot 792}{2} = 314028$.

Ao fazer $793? = 792? + 793$, teríamos um resultado maior que 314159.

Portanto, o número correto que os alunos devem dar como resposta para a professora é 792.

b) Trabalhando com a operação de termial, os alunos identificaram um padrão:

$$4? + 5? = 10 + 15 = 25 = 5^2$$
$$5? + 6? = 15 + 21 = 36 = 6^2$$
$$6? + 7? = 21 + 28 = 49 = 7^2$$

Entretanto, apenas mostrar exemplos não é o suficiente para provar que uma propriedade vale para todos os números naturais. Para essa identidade em específico, a demonstração pode ser feita algebricamente ou visualmente. Então:

Prove que se n é um número natural, então a igualdade $n? + (n+1)? = (n+1)^2$ é verdadeira. Isto é, prove que para todo número natural vale que o termial de um número somado ao termial de seu sucessor resulta no sucessor elevado ao quadrado.

Solução:

Vamos utilizar a fórmula que encontramos no item **a)** da questão.

$n? = \dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

Substituindo n por $n+1$ na fórmula, também obtemos:

$(n+1)? = \dfrac{((n+1)+1)\cdot(n+1)}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

Agora, vamos realizar manipulações algébricas na soma $n?+(n+1)?$ para chegar em $(n+1)^2$, o resultado que queremos.

$$\begin{aligned}
n? + (n+1)? &= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)n + (n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+(n+2))}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+2)}{2} \\
&= (n+1)\cdot\frac{(2n+2)}{2} \\
&= (n+1)\cdot\left(\frac{2n}{2}+\frac{2}{2}\right) \\
&= (n+1)\cdot(n+1) \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

4. Paula é filha de um vendedor de bombons. Seu pai vende 3 pacotes diferentes:

- Pacote Alegria, da marca Garota;
- Pacote Diversão, da marca Lacto;
- Pacote Mágica, da Cacau Legal.

Quando sobram bombons sem embalar nos pacotes, Paula os come. Assumindo que o pai de Paula sempre vai embalar o máximo possível de pacotes, responda:

a) A marca Garota somente vende caixas com 17 bombons. Sabendo que cada pacote Alegria vem com 15 bombons e o pai de Paula comprou 10 caixas da marca Garota hoje, quantos bombons dessa marca sobrará para Paula?

Solução:

O pai de Paula comprou 10 caixas da marca Garota, totalizando 170 bombons. Com essa quantidade, ele pode montar 11 pacotes Alegria, com 15 bombons em cada um, e ainda sobram 5 bombons para Paula. Isso pode ser expresso pela seguinte equação:

$$170 = 11 \times 15 + 5.$$

b) A marca Lacto somente vende caixas com 7 bombons e o pai de Paula vende o pacote Diversão com 9 bombons. Qual a menor quantidade de caixas o pai de Paula precisa comprar da marca Lacto amanhã para que Paula coma exatamente 2 bombons dessa marca?

Solução:

Para que Paula coma exatamente 2 bombons da marca Lacto, podemos analisar quantas caixas seu pai precisa comprar e quantos bombons sobrarão para Paula em cada cenário:

- Com 1 caixa, Paula comerá 7 bombons.
- Com 2 caixa, Paula comerá 5 bombons.
- Com 3 caixa, Paula comerá 3 bombons.
- Com 4 caixa, Paula comerá 1 bombons.
- Com 5 caixa, Paula comerá 8 bombons.
- Com 6 caixa, Paula comerá 6 bombons.
- Com 7 caixa, Paula comerá 4 bombons.
- Com 8 caixa, Paula comerá 2 bombons.

Portanto, o mínimo de caixas que o pai de Paula precisa comprar para que Paula coma exatamente 2 bombons é 8.

c) Ontem o pai de Paula comprou 11 caixas da Cacau Legal e Paula não comeu nenhum bombom dessa marca, mas se ele tivesse comprado 10 caixas ela teria comido 1. Sem saber quantos bombons vem na caixa da Cacau Legal, determine todas as possibilidades para a quantidade de bombons no pacote Mágica.

Solução:

Para determinar as possibilidades para a quantidade de bombons no pacote Mágica, vamos usar álgebra. Seja x um possível número de bombons no pacote Mágica (o que queremos descobrir) e k o número de bombons na caixa Cacau Legal.

Algebricamente, o enunciado nos diz que $10k$ dividido por x deixa resto 1, enquanto $11k$ dividido por x deixa resto 0. Isso pode ser expressado da seguinte forma:

$$10k = xp + 1$$
$$11k = xq,$$

sendo p e q números naturais. Como não estamos interessados no valor de k, vamos dar um jeito de remover ele da equação. Para fazer isso, primeiro multiplique a primeira equação por 11 e a segunda por 10:

$$110k = 11xp + 11$$
$$110k = 10xq$$

Agora, como temos $110k$ nas duas equações, obtemos que:

$$10xq = 11xp + 11$$

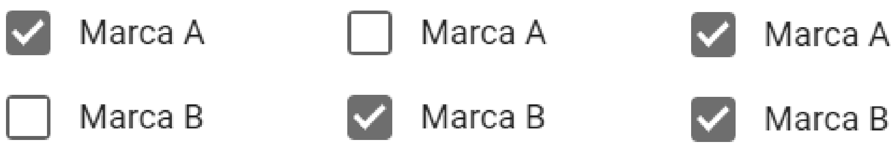
Rearranjando os termos resulta em:

$$11 = x(10p - 11q)$$

Isso nos diz que x é um *divisor* de 11. Mas como 11 é primo, seus únicos divisores são 1 e 11. Podemos descartar $x = 1$, pois se o pacote Mágica tivesse 1 bombom, não teria como Paula comer 1 bombom no caso de seu pai comprar 10 caixas. Portanto, a única possibilidade para a quantidade de bombons no pacote Mágica é 11.

5. Um programador está desenvolvendo um código para uma empresa de pesquisas. Está sendo aplicada uma pesquisa online que tem três perguntas, com o objetivo de saber quais marcas são mais populares. Para cumprir seu trabalho, o programador precisa resolver os três casos a seguir. Considere que são entrevistados apenas consumidores que conhecem ao menos uma das marcas mencionadas em cada uma das perguntas.

a) Na primeira pergunta, os entrevistados são questionados sobre as marcas A e B. Eles devem selecionar quais marcas conhecem. Portanto, existem três possibilidades de alguém que foi entrevistado responder a essa pergunta:



O gráfico de respostas da pesquisa apontou que 74% dos entrevistados conhece a marca A e 64% conhece a marca B. Qual é a porcentagem dos entrevistados que conhece ambas as marcas?

Solução:

Ao somar as duas porcentagens, obtemos $74\% + 64\% = 138\%$. Tal porcentagem está ultrapassando 100%, que representa o total de pessoas que responderam a pesquisa, em 38%. Logo, a porcentagem dos entrevistados que conhece ambas as marcas é 38%.

Adicionalmente, temos que:

$74\% - 38\% = 36\%$ dos entrevistados conhecem apenas a marca A.

$64\% - 38\% = 26\%$ dos entrevistados conhecem apenas a marca B.

Perceba que, como cada entrevistado deve selecionar apenas uma das opções mostradas na imagem acima, a soma das porcentagens relacionadas a elas deve ser 100%. Veja que, de fato, $36\% + 26\% + 38\% = 100\%$.

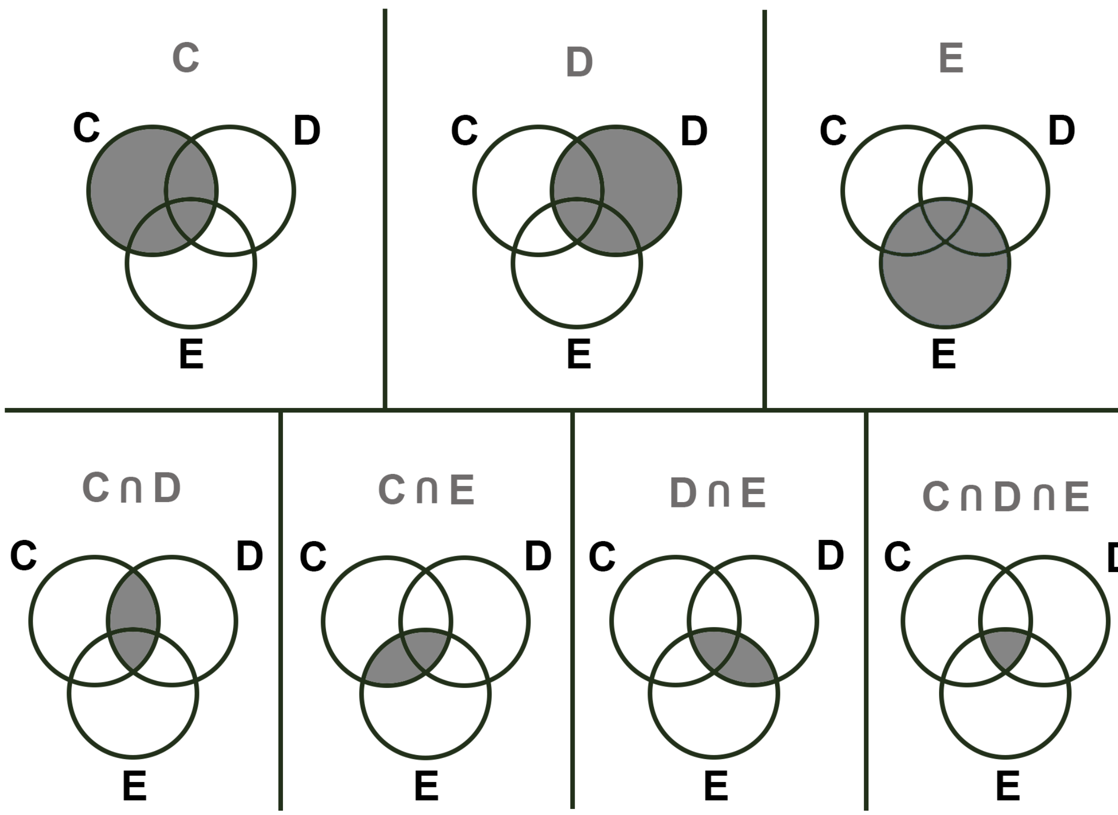
b) Na segunda pergunta, os entrevistados são questionados sobre as marcas C, D e E. Novamente, eles devem selecionar quais marcas conhecem, podendo ser uma, duas ou todas as três. Considere as notações de conjuntos a seguir:

- $n(C)$ representa a quantidade **total** de pessoas que conhecem a marca C
- $n(D)$ representa a quantidade **total** de pessoas que conhecem a marca D
- $n(E)$ representa a quantidade **total** de pessoas que conhecem a marca E
- $n(C \cap D)$ representa a quantidade **total** de pessoas que conhecem as marcas C e D
- $n(C \cap E)$ representa a quantidade **total** de pessoas que conhecem as marcas C e E
- $n(D \cap E)$ representa a quantidade **total** de pessoas que conhecem as marcas D e E
- $n(C \cap D \cap E)$ representa a quantidade de pessoas que conhecem as marcas C, D e E

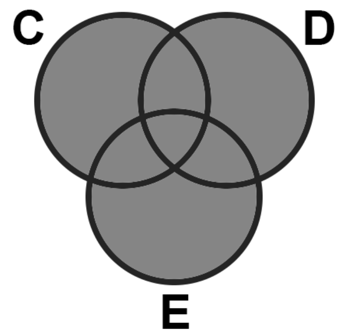
Determine uma expressão que represente corretamente o número total de entrevistados da pesquisa, utilizando apenas as notações apresentadas acima e operações de soma e subtração.

Solução:

Para começar, vamos representar todos os conjuntos mencionados no enunciado por meio de Diagramas de Venn. Considere que os conjuntos C, D e E contém as pessoas que conhecem as marcas mencionadas, respectivamente. Logo, a quantidade de elementos em um conjunto será o número de pessoas que conhece a marca referente a ele.

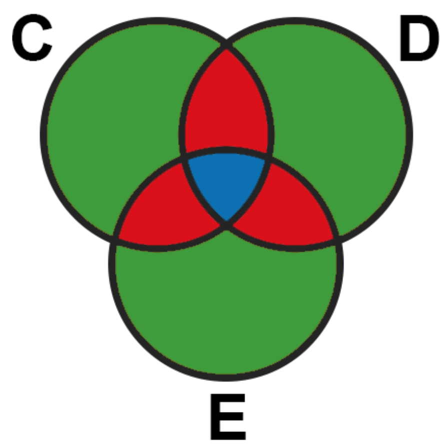


Nosso objetivo é representar precisamente a quantidade total de entrevistados. Perceba que essa quantidade pode ser representada pelo Diagrama de Venn abaixo:



Devemos, portanto, encontrar uma combinação dos sete conjuntos apresentados pelo enunciado para formar a figura mostrada acima, sem que nenhuma parte falte ou seja repetida.

Para nos auxiliar, vamos colorir cada uma das partes, delimitadas pelas curvas do Diagrama de Venn exibido.



De acordo com os Diagramas de Venn dos sete conjuntos que apresentamos anteriormente:

Ao somar n(C) + n(D) + n(E), obtemos as partes em verde sendo contadas uma vez, as partes em vermelho duas vezes e a parte em azul três vezes.

Ou seja: há partes do Diagrama sendo contadas duas ou mais vezes. Devemos subtrair termos para que cada parte seja somada apenas uma vez, de forma a completar a figura que representa a quantidade total de entrevistados, sem que tais delimitações sejam repetidas.

Ao somar $n(C \cap D) + n(C \cap E) + n(D \cap E)$, obtemos as partes em vermelho uma vez e a parte em azul três vezes.

Dessa forma, em $n(C) + n(D) + n(E) - \big((n(C \cap D) + n(C \cap E) + n(D \cap E)\big)$ temos as partes em verde contadas uma vez e as partes em vermelho uma vez.

Falta apenas adicionar a parte em azul, que é representada por $n(C \cap D \cap E)$.

Portanto, para formar a quantidade total de entrevistados, utilizamos a expressão:

$n(C) + n(D) + n(E) - n(C \cap D) - n(C \cap E) - n(D \cap E) + n(C \cap D \cap E)$.

c) Na terceira pergunta, os entrevistados são questionados sobre as marcas F, G, H, I e J. Novamente, eles devem selecionar quais marcas conhecem, podendo ser uma, duas, três, quatro ou todas as cinco. De forma similar ao item anterior, determine uma expressão que represente corretamente o número total de entrevistados da pesquisa, utilizando o mesmo padrão das notações de conjuntos que foi apresentado no item anterior.

Observação: não é necessário definir cada variável do tipo n(Conjunto), você pode apenas utilizá-las conforme a lógica do item b).

Solução:

Para essa questão, uma generalização do item anterior é o suficiente.

Perceba que ao somar $n(F) + n(G) + n(H) + n(J) + n(I)$, para eliminar partes repetidas, precisaremos subtrair $\big(n(F \cap G) - n(F \cap H) - n(F \cap I) - n(F \cap J) - n(G \cap H) - n(G \cap I) - n(G \cap J) - n(H \cap I) - n(H \cap J) - n(I \cap J)\big)$. Em seguida, teremos partes faltando, e precisaremos somar as combinações das interseções de três conjuntos. Depois, subtraímos as combinações das interseções de quatro conjuntos, e por fim, somar a única parte que faltará: a interseção dos cinco conjuntos.

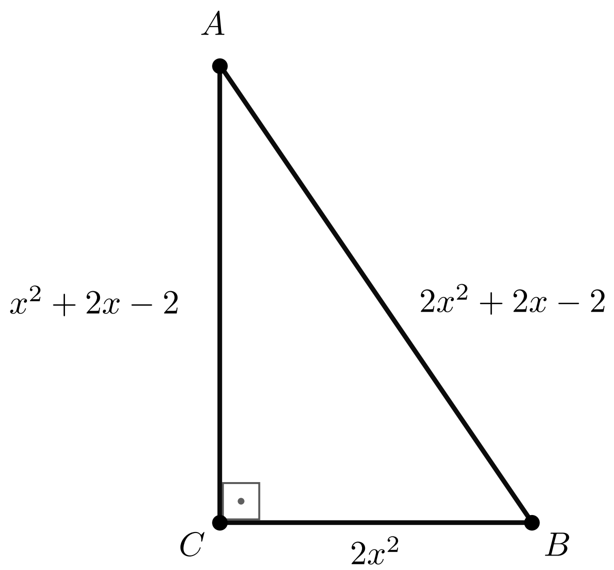
Dessa forma, a expressão que representa corretamente o número total de entrevistados da pesquisa é:

$n(F) + n(G) + n(H) + n(I) + n(J)$ **$- n(F \cap G) - n(F \cap H) - n(F \cap I) - n(F \cap J) - n(G \cap H) - n(G \cap I) - n(G \cap J) - n(H \cap I) - n(H \cap J) - n(I \cap J)$** $+ n(F \cap G \cap H) + n(F \cap G \cap I) + n(F \cap G \cap J) + n(F \cap H \cap I) + n(F \cap H \cap J) + n(F \cap I \cap J) + n(G \cap H \cap I) + n(G \cap H \cap J) + n(G \cap I \cap J) + n(H \cap I \cap J)$ **$- n(F \cap G \cap H \cap I) - n(F \cap G \cap H \cap J) - n(F \cap G \cap I \cap J) - n(F \cap H \cap I \cap J) - n(G \cap H \cap I \cap J)$** $+ n(F \cap G \cap H \cap I \cap J)$.

A generalização de tal resultado é chamado de Princípio da Inclusão-Exclusão.

6. Nos itens a seguir, assuma que os lados dos triângulos são maiores que zero.

   a) Os lados do triângulo retângulo estão descritos como expressões em x. Determine o valor de x.



Solução:

Começamos aplicando o teorema de Pitágoras para obter uma equação em x:

$$(x^2 + 2x - 2)^2 + (2x^2)^2 = (2x^2 + 2x - 2)^2$$

Para evitar o trabalho de expandir os termos, vamos passar $(x^2 + 2x - 2)^2$ para o outro lado e usar a identidade de diferença dos quadrados:

$$\begin{aligned}(2x^2)^2 &= \left[(2x^2 + 2x - 2) + (x^2 + 2x - 2)\right] \cdot \left[(2x^2 + 2x - 2) - (x^2 + 2x - 2)\right] \\ &= (3x^2 + 4x - 4) \cdot (x^2)\end{aligned}$$

Aqui, temos x^2 em ambos lados da equação. Observando que x não pode ser igual a zero, pois isso significaria que o triângulo teria lados negativos, podemos simplificar o x^2:

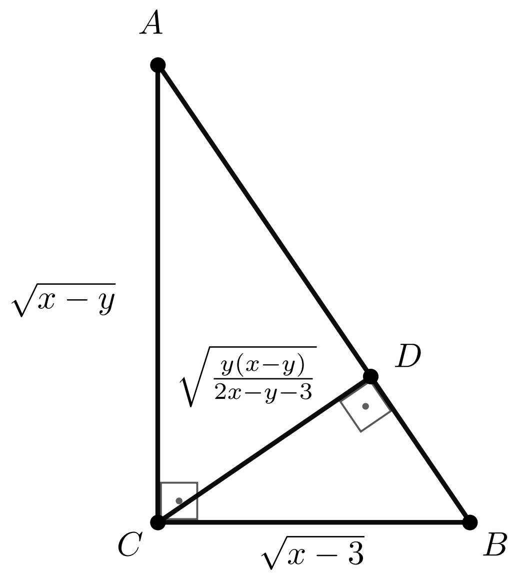
$$4x^2 = 3x^2 + 4x - 4$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \Rightarrow (x - 2)^2 = 0\end{aligned}$$

Portanto, o valor de x é igual a 2.

b) O comprimento de dois lados e uma altura do triângulo retângulo estão descritos como expressões de x e y. Determine o valor de $x - y$.



Solução:

Para obtermos uma equação em x e y, vamos calcular a área do triângulo $\triangle ABC$ de duas maneiras diferentes:

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Área}(\triangle ABC) = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2}$$

Observe que o único valor que não temos expresso em termos de x e y é $\overline{AB}$. No entanto, como o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para obtê-lo:

$$(\overline{AB})^2 = (\sqrt{x-y})^2 + (\sqrt{x-3})^2$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2x-y-3}$$

Substituindo esses valores nas duas fórmulas de área e igualando-as, obtemos:

$$\frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x-3}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{y(x-y)}{2x-y-3}} \cdot \sqrt{2x-y-3}}{2}$$

Simplificando o "2" que aparece dividindo em ambos os lados, o $\sqrt{2x-y-3}$ que multiplica e divide do lado direito, e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos:

$$(x-y) \cdot (x-3) = y(x-y)$$

Passando $y(x-y)$ para o lado esquerdo da equação e agrupando os termos que multiplicam $x-y$, chegamos a:

$$(x-y)\cdot(x-y-3)=0$$

Observe que $x-y$ não pode ser zero, caso contrário, o lado AC teria comprimento zero. Portanto, $x-y-3=0 \Rightarrow x-y=3$.