1. Júlio César estava lendo O Homem que Calculava, de Malba Tahan, e ficou particularmente interessado no curioso problema dos quatro quatros, que é apresentado no livro: podemos formar diversos números usando exatamente quatro veze s o algarismo 4 e uma ou mais das operações aritméticas básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) – por exemplo, podemos formar os números 10 e 16 deste modo, pois $10 = (44 - 4) \div 4$ e $16 = 4 - 4 + 4 \times 4$. Júlio César decidiu então inventar problemas parecidos com este, mas usando outros algarismos. Resolva cada desafio proposto por Júlio César.

(a) O problema dos três três: "Forme o número 4 usando exatamente três vezes o algarismo 3".

Solução:

Uma solução possível é: $3 + 3 \div 3$.

(b) O problema dos cinco cincos: "Forme o número 6 usando exatamente cinco vezes o algarismo 5".

Solução:

Uma solução possível é: $5 + 55 \div 55$.

(c) O problema dos seis seis: "Forme o número 7 usando exatamente seis vezes o algarismo 6".

Solução:

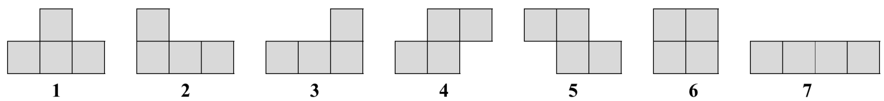
Uma solução possível é: $6 + 6 \div 6 + 6 \times (6 - 6)$.

(d) O problema dos sete setes: "Forme o número 8 usando exatamente sete vezes o algarismo 7".

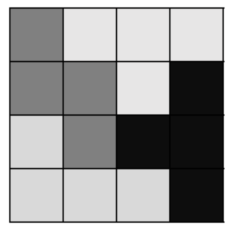
Solução:

Uma solução possível é: $7 + 777 \div 777$.

2. Pedro e Luíza estão brincando com peças inspiradas no jogo Tetris. Existem 10 peças de cada um dos sete modelos abaixo: Pedro pergunta para Luíza se é possível preencher um tabuleiro

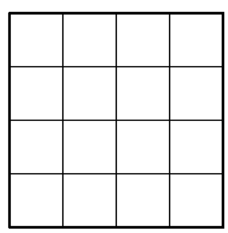


4x4 utilizando duas peças do modelo 1, uma peça do modelo 2 e uma peça do modelo 4. Luíza apresenta então a solução ao lado.



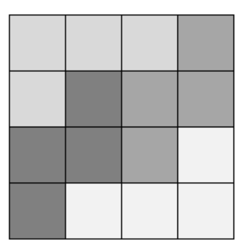
Assim como no jogo Tetris, só é permitido fazer movimentos bidimensionais (girando a peça no plano). Nesse sentido, também não é permito que nenhuma peça se sobreponha a outra, isto é, fique com uma parte em cima da outra.

(a) Preencha o tabuleiro abaixo utilizando duas peças do modelo 3 e duas peças do modelo 5.

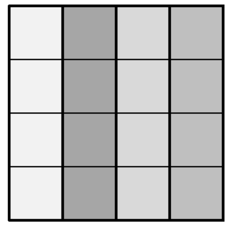


Solução:

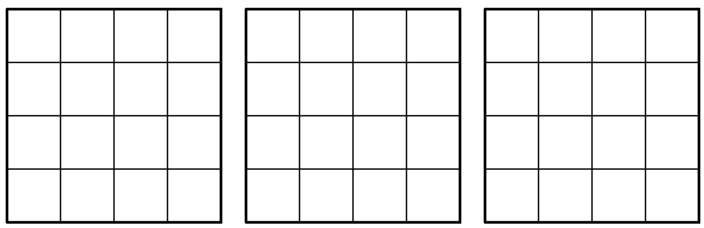
Uma maneira de preencher o tabuleiro é a seguinte. Note que qualquer rotação deste modelo também é uma maneira válida de preencher o tabuleiro.



(b) Se tivermos 4 peças do modelo 7, podemos preencher o tabuleiro 4x4 como:

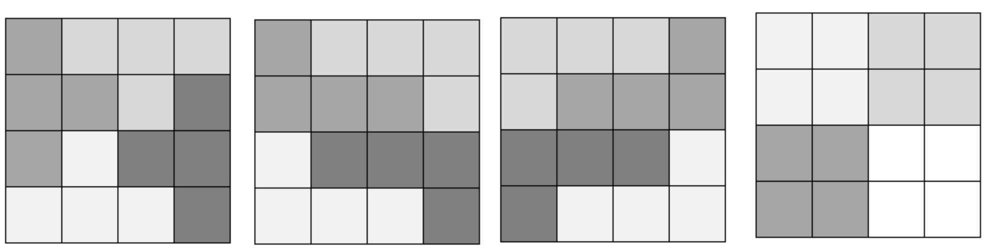


Preencha cada um dos tabuleiros abaixo utilizando 4 peças de mesmo modelo (e que não seja a do modelo 7, já usada no exemplo). Utilize um modelo de peça diferente em cada tabuleiro.

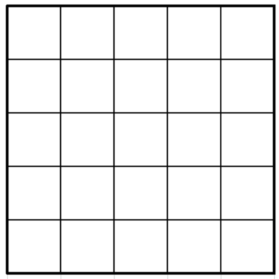


Solução:

É possível preencher o tabuleiro 4x4 com um único modelo de peça com os modelos 1, 2, 3, 6 e 7.



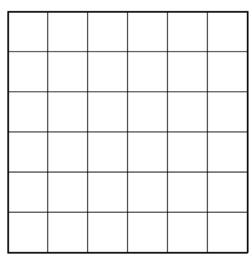
(c) Explique por que não é possível preencher completamente um tabuleiro 5x5 utilizando quaisquer peças.



Solução:

Não é possível preencher completamente um tabuleiro 5x5 utilizando quaisquer peças, pois o tabuleiro 5x5 possui um número ímpar de quadradinhos (25 quadradinhos) e cada peça possui exatamente 4 quadradinhos em sua composição. Assim, só podemos preencher tabuleiros que possuem um número múltiplo de 4 de quadradinhos.

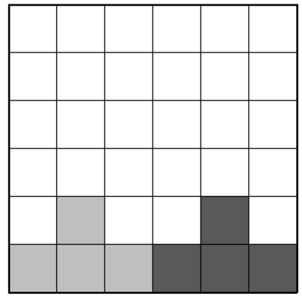
(d) É possível preencher um tabuleiro 6x6 utilizando apenas peças do modelo 1? Justifique sua resposta.



Solução:

Não é possível preencher um tabuleiro 6x6 utilizando apenas peças do modelo 1.

A única maneira de preencher a base do quadrado 6x6 é com as duas peças na posição original.

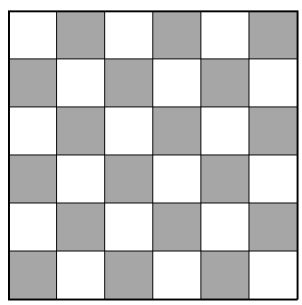


Entretanto, nesta configuração não há como preencher a segunda fileira utilizando apenas peças do modelo 1 sem sobrepô-las.

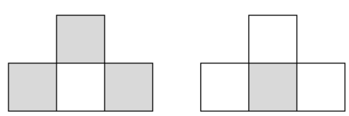
Vejamos agora uma outra maneira de justificar que não é possível preencher o tabuleiro 6x6 utilizando apenas peças do modelo 1.

Caso fosse possível preencher este tabuleiro, como ele possui 36 quadradinhos e cada peça é formada por 4 quadradinhos, são necessárias 9 peças para preencher completamente o tabuleiro.

Se pintarmos o tabuleiro num padrão xadrez, perceberemos que ele possui 18 quadradinhos claros e 18 quadradinhos escuros.



Além disso, ao posicionar uma peça do modelo 1 no tabuleiro, esta peça preenche 3 quadradinhos de uma cor e um quadradinho de outra cor.



Desta forma, como são necessárias 9 peças para preencher o tabuleiro, um dos modelos acima terá mais peças que o outro e, portanto, terá mais quadradinhos preenchidos com a cor predominante do modelo da peça que foi utilizada mais vezes. Portanto não há como preencher o tabuleiro 6x6 utilizando apenas peças do modelo 1.

3. Maria descobriu dois tipos interessantes de números enquanto estudava, os descendentes e os centrados. Dizemos que um número é descendente se seus algarismos são escritos em ordem decrescente. Por exemplo, os números 8521 e 940 são descendentes, enquanto os números 623 e 883 não são descendentes. Um número de três algarismos é dito centrado se o algarismo das dezenas é a média aritmética dos outros algarismos. Por exemplo, 246 é centrado, pois $4 = \dfrac{2+6}{2}$. Já o número 359 não é centrado, pois $5 \neq \dfrac{3+9}{2}$.

(a) Quantos números descendentes existem entre 100 e 499?

Solução:

Para um número XYZ ser descendente, ele deve satisfazer a relação $X > Y > Z$. Assim, os números descendentes que existem entre 100 e 499 são:

$$210 - 310 - 320 - 321 - 410 - 420 - 421 - 430 - 431 - 432,$$

totalizando 10 números.

(b) Considerando apenas os números de três algarismos, quantos deles são descendentes e centrados ao mesmo tempo?

Solução:

Para um número XYZ ser descendente e centrado ao mesmo tempo, ele deve satisfazer as relações $X > Y > Z$ e $Y = \dfrac{X+Z}{2}$. Note que X e Z devem possuir a mesma paridade para que sua soma seja um número par. Assim, podemos construir os números a partir destas relações e obtemos:

210
321
420 – 432
531 – 543
630 – 642 – 654
741 – 753 – 765
840 – 852 – 864 – 876
951 – 963 – 975 – 987,

totalizando 20 números.

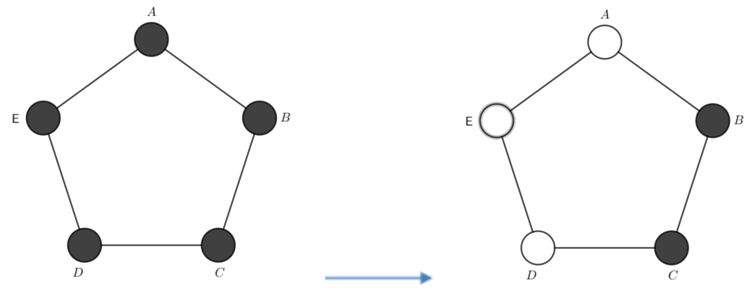
(c) Sabendo que $7AB$ é um número centrado e $5B1$ é um número descendente (onde A e B representam um algarismo), determine o valor de A e o valor de B.

Solução:

Como $5B1$ é um número descendente, vale a relação $5 > B > 1$. Assim, os único valores possíveis para B são $2, 3$ e 4. Além disso, como $7AB$ é um número centrado, vale a relação $A = \dfrac{7+B}{2}$. Em particular, para podermos dividir $7+B$ por 2, o número B precisa ser um número ímpar.

Portanto, $B = 3$ e $A = 5$.

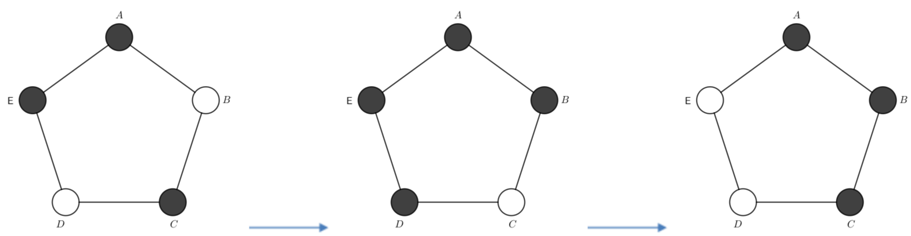
4. O mecanismo luminoso representado abaixo possui 5 botões, representados pelas letras A, B, C, D e E, e estão conectados formando um pentágono. Os botões possuem os estados aceso (em branco) e apagado (em preto). Sempre que um botão é apertado, o botão pressionado e seus vizinhos (isto é, aquele que estão diretamente ligados a ele por um dos lados do pentágono) mudam de estado. Ao apertarmos o botão E no momento que todos os botões estavam apagados, acendem os botões A, E e D, conforme mostra a figura abaixo:



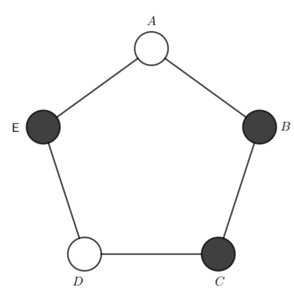
a) Continuando a partir da configuração à direita na figura acima, quais botões estarão acesos após apertarmos, respectivamente, os botões A - C - D?

Solução:

Os botões que estarão acesos são o D e o E.

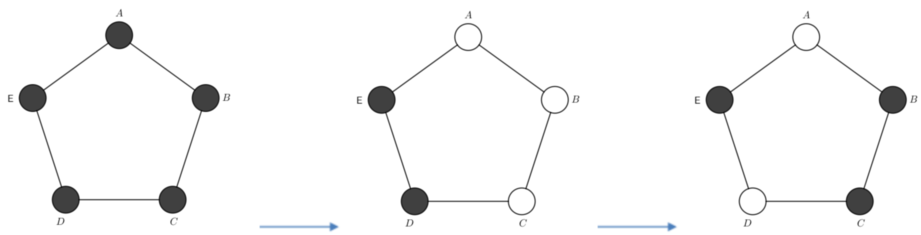


b) Começando novamente com todos os botões apagados, determine uma sequência de botões a serem pressionados para se obter a configuração abaixo.



Solução:

Uma sequência para obter esta configuração é apertar o botão B e o botão C.



Não há diferença no resultado final a ordem em que se apertam os botões, então a sequência B-C e C-B chegam na mesma configuração. Além disso, a sequência E-C-B-E também resulta na mesma configuração, pois ao apertar o mesmo botão duas vezes, não há modificações na configuração.

Portanto, qualquer sequência em que aparece um número par de vezes os botões A, D e E e um número ímpar de vezes os botões B e C irá resultar na configuração pedida.

5. Em um reino muito distante, o comércio é feito utilizando moedas de quatro cores distintas: laranja, verde, azul e preto. A relação entre os valores das moedas é a seguinte:

   1 MOEDA AZUL + 1 MOEDA PRETA = 1 MOEDA LARANJA

   1 MOEDA LARANJA + 1 MOEDA AZUL = 1 MOEDA VERDE

   2 MOEDAS LARANJAS = 3 MOEDAS PRETAS

   Um copo de suco neste reino custa 12 moedas azuis.

   a) Um habitante deste reino comprou um copo de suco utilizando 1 moeda azul, 3 moedas laranjas e 5 moedas pretas, recebendo de troco apenas moedas verdes. Quantas moedas verdes foram recebidas?

Solução:

Denotando por A, L, P, V o valor das moedaz azuis, laranjas, pretas e verdes, respectivamente, obtemos a seguinte relação:

$$\begin{cases} A + P = L \\ A + L = V \\ 2L = 3P \end{cases}$$

Assim, temos que $2A + 2P = 2L$ e, como $2L = 3P$, concluímos que $2A + 2P = 3P$, ou seja, $P = 2A$.

Usando o fato que $2L = 3P$ e $P = 2A$, conluímos que $2L = 6A$, ou seja, $L = 3A$.

Por fim, como $A + L = V$ e $L = 3A$, concluímos que $V = 4A$.

Como o habitante utilizou 1 moeda azul, 3 moedas laranjas e 5 moedas pretas, o valor utilizado é equivalente à 20 moedas azuis, pois

$$A + 3L + 5P = A + 9A + 10A = 20A.$$

Como um suco custa 12 moedas azuis, o troco recebido possui valor equivalente à 8 moedas azuis e como cada moeda verde equivale à 4 moedas azuis, concluímos que o troco recebido foi de 2 moedas verdes.

b) Quantos sucos podem ser comprados se você possuir quatro moedas de cada cor? Quanto é o troco, neste caso, em moedas pretas?

Solução:

Como possuímos 4 moedas de cada cor, o valor equivalente em moedas azuis é

$$4A + 4L + 4P + 4V = 4A + 12A + 8A + 16A = 40A$$

Como cada suco custa 12 moedas azuis e o valor possuído equivale à 40 moedas azuis, é possível comprar 3 sucos, pois $40 = 3 \times 12 + 4$. Como o troco equivale a 4 moedas azuis e $P = 2A$, o troco recebido é 2 moedas pretas.

6. Vamos chamar de imparcial todo número que é o produto de dois ímpares consecutivos. Ordenando os números imparciais positivos de modo crescente, temos: 3, 15, 35 e assim por diante:

1º	1×3=3
2º	3×5=15
3º	5×7=35
(...)	(...)

(a) Considere o número 98A549392B4, onde A e B representam algarismos. Explique por que este número não pode ser imparcial, independentemente do valor de A e B.

Solução:

Como a multiplicação de dois números ímpares resulta sempre em um número ímpar, então todo número *imparcial* é ímpar. Mas o número 98A549392B4 é par, independentemente do valor de A e de B, pois termina em algarismo par: portanto, esse número não pode ser imparcial.

(b) Tomando os 10 primeiros números da lista de números imparciais, quantos deles são múltiplos de 3? E quantos são múltiplos de 5?

Solução:

Vejamos quais são os dez primeiros números imparciais, de acordo com a definição dada no enunciado:

Ordem	Nº imparcial	É múltiplo de 3?	É múltiplo de 5?
1º	$1 \times 3 = 3$	Sim	Não
2º	$3 \times 5 = 15$	Sim	Sim
3º	$5 \times 7 = 35$	Não	Sim
4º	$7 \times 9 = 63$	Sim	Não
5º	$9 \times 11 = 99$	Sim	Não
6º	$11 \times 13 = 143$	Não	Não
7º	$13 \times 15 = 195$	Sim	Sim
8º	$15 \times 17 = 255$	Sim	Sim
9º	$17 \times 19 = 323$	Não	Não
10º	$19 \times 21 = 399$	Sim	Não

Portanto, entre os 10 primeiros imparciais há **7 múltiplos de 3 e 4 múltiplos de 5**. Note que não seria necessário efetuar todas essas multiplicações, bastando observar quais são os fatores da multiplicação: se um dos fatores é múltiplo de 3, então o resultado será múltiplo de 3; o mesmo raciocínio para o caso do 5.

(c) Tomando os 2023 primeiros números da lista de números imparciais, quantos deles são múltiplos de 3? E quantos são múltiplos de 5?

Solução:

De acordo com a tabela construída na resposta ao item b, podemos observar que, a cada três números imparciais, dois são múltiplos de 3, pois a sequência de multiplicidade por 3 segue o padrão: sim - sim - não - sim - sim - não etc. Como $2023 = 3 \times 674 + 1$, então completam-se 674 ciclos *sim - sim - não* (ou seja, cada ciclo contendo dois números múltiplos de 3) e ainda sobra 1 número que será o 1º de um novo ciclo. Portanto, a quantidade total de múltiplos de 3 é: $674 \times 2 + 1 =$ **1349 múltiplos de 3**.

Para o caso dos múltiplos de 5, podemos observar que a cada cinco números imparciais, dois são múltiplos de 5, pois a sequência de multiplicidade por 5 segue o padrão: não - sim - sim - não - não. Como $2023 = 5 \times 404 + 3$, então completam-se 404 ciclos *não - sim - sim - não - não* (ou seja, cada ciclo contendo dois números múltiplos de 5) e ainda sobram três número para iniciar o próximo ciclo (sendo o 2º e 3º deles múltiplos de 5). Portanto, a quantidade total de múltiplos de 5 é: $404 \times 2 + 2 =$ **810 múltiplos de 5**.

(d) Prosseguindo com essa lista, em algum momento obteremos o número 3 400 056 099 e, logo a seguir, o número 3 400 289 343. Um dos números abaixo é o próximo da lista:

$$3\,400\,522\,595$$
$$3\,430\,511\,393$$
$$3\,460\,522\,587$$
$$3\,490\,611\,747$$
$$3\,520\,345\,448$$

O que você pode fazer para descobrir qual é esse número sem efetuar nenhuma grande conta de multiplicação?

Solução:

Novamente, olhemos para a tabela construída na resposta ao item b. Considerando **o último algarismo** de cada número imparcial, notamos o ciclo: 3 - 5 - 5 - 3 - 9. Portanto, após um número imparcial terminado em 9 (como é o caso de 3 400 056 099) e outro terminado em 3 (como é o caso de 3 400 289 343), o próximo imparcial a aparecer deve terminar com o algarismo 5. Logo, a única possíbilidade entre os cinco números listados é **3 400 522 595**.