

# OPRM 2023

Olimpíada Paranaense  
de Matemática

OPRM 2023  
Nível 3 (Ensino Médio)  
Primeira Fase  
02 ou 03 de junho  
Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

Escola: \_\_\_\_\_

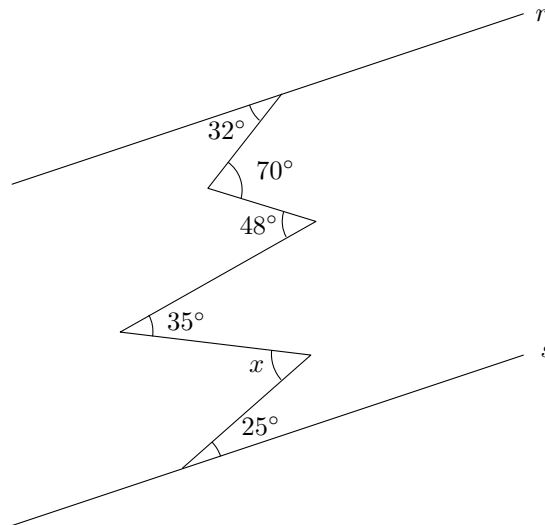
Fiscal: \_\_\_\_\_

## INSTRUÇÕES

- Escreva o seu nome, o nome da sua escola e o nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 8 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou algum problema faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta a qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Você pode fazer seus cálculos e anotações ao longo deste caderno de questões. Além disso, há uma página de rascunho no verso da prova.
- As respostas finais devem ser marcadas **com cuidado** na Folha de Respostas.
- Só serão consideradas as respostas assinaladas na Folha de Respostas. O que você escrever neste caderno de questões ou em folhas de rascunho não será considerado para fins de avaliação.
- Ao finalizar a prova, entregue ao **FISCAL** a Folha de Respostas, o caderno de questões e as folhas de rascunho que você eventualmente tenha usado.

**BOA PROVA!**

- Um grupo de meninas estava dançando em roda. Aline era a quinta à esquerda de Cecília e a nona à direita de Cecília. Quantas meninas havia na roda?  
(A) 11  
(B) 12  
(C) 13  
(D) 14  
(E) 15
- Se  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é uma função tal que  $f(1) + \dots + f(n) = n^2$ , então quanto vale  $f(2023)$ ?  
(A) 2023  
(B)  $2023^2$   
(C) 2025  
(D)  $2023^2 - 2023$   
(E) 4045
- Dada a figura a seguir, sabendo que a reta  $r$  é paralela à reta  $s$ , qual é a medida do ângulo  $x$ , em graus?



- (A)  $45^\circ$   
(B)  $48^\circ$   
(C)  $50^\circ$   
(D)  $52^\circ$   
(E)  $55^\circ$
- Quantos múltiplos de 23 existem entre 2.023 e 20.023?  
(A) 783  
(B) 784  
(C) 801  
(D) 802  
(E) 805

5. Qual é a medida do perímetro de um retângulo de diagonal  $\sqrt{1010}$  cm e área  $377 \text{ cm}^2$ ?
- (A) 34 cm
  - (B) 42 cm
  - (C) 68 cm
  - (D) 84 cm
  - (E) 102 cm
6. Suponha que Pedro tenha 3 dados, um azul, um branco e um verde. Qual a probabilidade dele lançar os três dados de modo que as faces que ficaram viradas para cima sejam números primos cuja soma resulta em um número par?
- (A)  $\frac{13}{6^3}$
  - (B)  $\frac{36}{6^3}$
  - (C)  $\frac{27}{6^3}$
  - (D)  $\frac{12}{6^3}$
  - (E)  $\frac{28}{6^3}$
7. Quanto vale o perímetro de um hexágono regular de área  $96\sqrt{3}$ ?
- (A) 96
  - (B) 48
  - (C)  $24\sqrt{3}$
  - (D)  $36\sqrt{3}$
  - (E) 72
8. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há no mínimo duas mil e vinte e três que fazem aniversário no mesmo mês?
- (A) 24.253
  - (B) 24.264
  - (C) 24.265
  - (D) 24.276
  - (E) 24.277

9. Qual é o último dígito de  $19^{2023}$ ?
- (A) 1
  - (B) 3
  - (C) 5
  - (D) 7
  - (E) 9
10. Se  $x \geq y \geq z \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ ,  $xy = 15$ ,  $xz = 13$  e  $yz = 56$ , então o valor de  $x - y - z$  é:
- (A) 4
  - (B) 5
  - (C) 6
  - (D) 7
  - (E) 8
11. Sejam  $a, b, c$  raízes distintas de  $x^3 + ix^2 - x - i = 0$ , onde  $i^2 = -1$ . Qual é o valor de  $(abc)^{2023}$ ?
- (A) 1
  - (B)  $-1$
  - (C)  $i$
  - (D)  $-i$
  - (E)  $1 + i$
12. Quantos são os inteiros não negativos  $a, b, c$  tais que  $a + 2b + 3c = 12$ ?
- (A) 25
  - (B) 19
  - (C) 16
  - (D) 11
  - (E) 8
13. Se  $r_1, r_2, r_3$  são as raízes do polinômio  $x^3 + ax^2 + bx + c$ , então quanto vale  $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$ ?
- (A)  $\frac{a^2 - 2b}{c^2}$
  - (B)  $\frac{a^2}{c^2}$
  - (C)  $\frac{a^2 + b}{c^2}$
  - (D)  $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$
  - (E)  $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

14. Qual o valor da expressão a seguir?

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

- (A)  $\sqrt{2} - 1$
- (B)  $\sqrt{2}$
- (C) 2
- (D) 4
- (E)  $\frac{1}{2}$

15. Determine o coeficiente de  $x^{2023}$  no desenvolvimento de  $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{2021}$ .

- (A)  $\binom{2021}{674}$
- (B)  $\binom{2021}{1011}$
- (C)  $\binom{2021}{1348}$
- (D)  $\binom{2021}{2019}$
- (E)  $\binom{2023}{2021}$

16. Qual é o menor inteiro positivo que possui exatamente 77 divisores positivos?

- (A) 124.416
- (B) 248.832
- (C) 373.248
- (D) 746.496
- (E) 4.478.976

17. Um estacionamento possui 12 vagas, uma ao lado da outra e em uma única fileira. De quantos modos é possível estacionar 4 carros idênticos nesse estacionamento de modo que não haja carros estacionados em vagas consecutivas?

- (A) 70
- (B) 126
- (C) 210
- (D) 330
- (E) 495

18. Pedro, novamente com seus três dados distintos, decide jogá-los e obtém o valor  $A$  no dado azul,  $B$  no dado branco e  $C$  no dado verde virados para cima. Qual a probabilidade de  $A + B < C$  ?

(A)  $\frac{9}{6^3}$

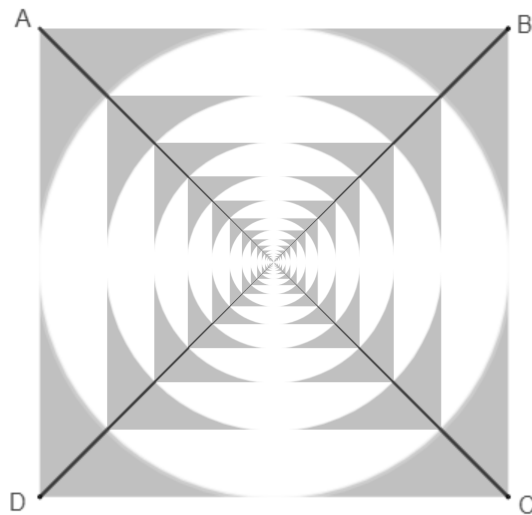
(B)  $\frac{13}{6^3}$

(C)  $\frac{20}{6^3}$

(D)  $\frac{26}{6^3}$

(E)  $\frac{27}{6^3}$

19. Seja  $ABCD$  um quadrado hachurado de lado 1 com diagonais  $AC$  e  $BD$ . Decidimos então, inscrever um círculo de cor branca nele. A partir disso, repetimos o seguinte processo infinitamente: Em cada círculo branco, inscrevemos um quadrado hachurado e em cada quadrado hachurado inscrevemos um círculo branco, conforme a figura abaixo. Sabendo disso, quanto vale a área hachurada da figura?



(A)  $\sqrt{2} \left( 3 - \frac{2\pi}{3} \right)$

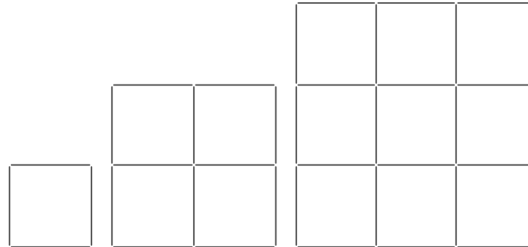
(B)  $2\sqrt{2} - \pi$

(C)  $1 - \frac{\pi}{4}$

(D)  $4 - \pi$

(E)  $2 - \frac{\pi}{2}$

20. Conforme podemos averiguar pelas imagens abaixo, é preciso 4 segmentos para fazer um quadrado de lado 1, 12 segmentos para fazer um quadrado de lado 2 e 24 segmentos para fazer um quadrado de lado 3. Quantos segmentos são necessários para fazer um quadrado de lado 2023?



- (A) 16.378.308
- (B) 8.189.104
- (C) 4.094.552
- (D) 2.047.276
- (E) 1.023.638

**RASCUNHO**