

OPRM 2023

Olimpíada Paranaense
de Matemática

OPRM 2023
Nível 1 (6º e 7º Ano)
Primeira Fase
02 ou 03 de junho
Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: _____

Escola: _____

Fiscal: _____

INSTRUÇÕES

- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 10 páginas (incluindo esta página de capa e a página de rascunho) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta a qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, tais como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Você pode fazer seus cálculos e anotações ao longo deste caderno de questões. Além disso, há uma página de rascunho no verso da prova.
- As respostas finais devem ser marcadas **com cuidado** na Folha de Respostas.
- Só serão consideradas as respostas assinaladas na Folha de Respostas. O que você escrever neste caderno de questões ou em folhas de rascunho não será considerado para fins de avaliação.
- Ao finalizar a prova, entregue ao **FISCAL** a Folha de Respostas, o caderno de questões e as folhas de rascunho que você eventualmente tenha usado.

BOA PROVA!

1. Num dia chuvoso, apenas 10 alunos foram para a aula de Matemática. O professor então propôs a seguinte atividade:

“Formem uma fila e os dois primeiros da fila digam um número. O próximo da fila deve dizer em voz alta a soma dos últimos dois números falados”.

O primeiro aluno falou “2” e o segundo aluno falou “1”. Assim, o terceiro da fila falou “3”, o quarto, “4”, e assim por diante. Sabendo que todos os alunos acertaram a atividade, qual foi o número dito pelo último aluno da fila?

- (A) 10
(B) 29
(C) 47
(D) 76
(E) 123
2. No início do mês, Pedro mediu uma planta em seu jardim e viu que ela tinha 50 centímetros de altura. Ele descobriu que a planta crescia 10 centímetros todo dia, mas que, durante a noite, um pássaro vinha e quebrava 5 centímetros dela. Assim, quando Pedro foi dormir no dia 01, a planta estava com 60 centímetros, mas ao acordar, no dia 02, ela estava com 55 centímetros. Em qual dia do mês a planta atingiu 1 metro de altura **pela primeira vez**?
- (A) 5
(B) 8
(C) 9
(D) 10
(E) 12
3. Observe as multiplicações abaixo:

$$\begin{aligned}101 \times 101 &= 10\,201 \\1\,001 \times 1\,001 &= 1\,002\,001 \\10\,001 \times 10\,001 &= 100\,020\,001. \\&(\dots)\end{aligned}$$

Seguindo este padrão, o número 100 000 020 000 001 será o resultado da multiplicação de que número por si mesmo?

- (A) 100 001
(B) 1 000 001
(C) 10 000 001
(D) 10 000 002
(E) 100 000 001
4. Vitória e Lucas gostam muito de correr. Eles se encontram na pista de atletismo da UFPR, que tem 400 metros de comprimento. Em dez minutos, Vitória consegue dar 4 voltas completas na pista, enquanto Lucas, apenas 3. Sabendo que Vitória e Lucas começaram a corrida juntos, após quarenta minutos é possível afirmar que:
- (A) Vitória ultrapassou Lucas exatamente duas vezes.
(B) Lucas completou exatamente 16 voltas.
(C) Vitória completou exatamente 12 voltas.
(D) Lucas percorreu exatamente 4 quilômetros.
(E) Vitória percorreu exatamente 6,4 quilômetros.

5. Multiplicando todos os números naturais de 1 até 2023 ($1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2023$), quais serão **os três últimos algarismos** do resultado?
- (A) 000
 - (B) 001
 - (C) 002
 - (D) 100
 - (E) 200

6. Num dia de muito calor, a Vovó Maria decidiu preparar um delicioso suco refrescante para seus cinco netos. A receita do suco é a seguinte:

- 100ml de suco de kiwi.
- 50ml de leite condensado.
- 100ml de suco de laranja.
- 200ml de suco de abacaxi.

Todavia, essa receita só dava para quatro copos cheios de suco, de modo que a Vovó Maria teve de adaptá-la, para que cada neto ganhasse exatamente um copo cheio de suco. Assim, é correto afirmar que na nova receita a Vovó Maria utilizou:

- (A) 125ml de suco de kiwi.
- (B) 75ml de leite condensado.
- (C) 120ml de suco de laranja.
- (D) 225ml de suco de abacaxi.
- (E) 240ml de suco de abacaxi.

7. Qual é o resultado da conta abaixo?

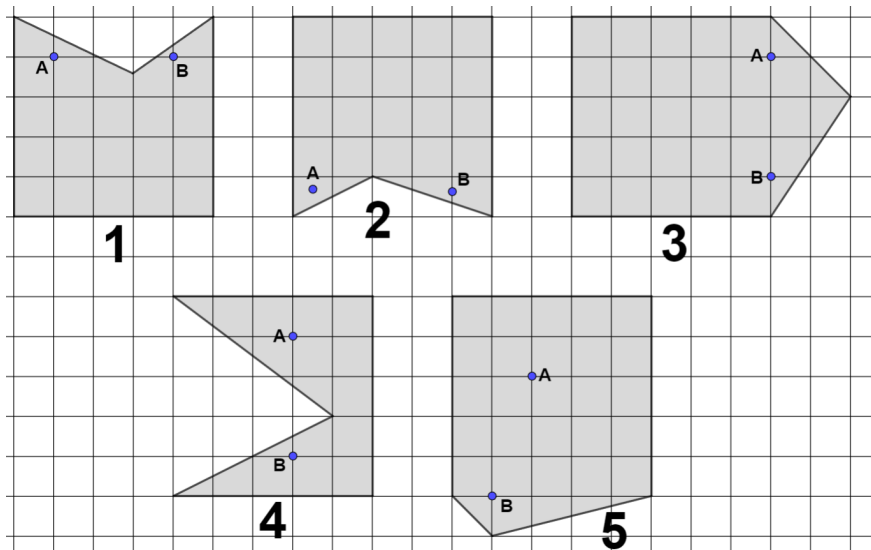
$$200\,000 \times 300\,000 \div 600\,000$$

- (A) 1
- (B) 18 000
- (C) 50 000
- (D) 100 000
- (E) 10 000 000 000

8. Se somarmos **três números naturais consecutivos** quaisquer, então podemos **garantir** que o resultado sempre será:

- (A) Um número par.
- (B) Um número ímpar.
- (C) Um múltiplo de 3.
- (D) Um múltiplo de 4.
- (E) Não é possível concluir nada.

9. Em um jogo on-line, 2023 jogadores foram sorteados pelo computador para formar equipes de 5 ou 6 pessoas. Sabendo que nenhum jogador ficou sem equipe, **no máximo** quantas equipes de 6 pessoas poderiam ter sido formadas?
- (A) 332
(B) 333
(C) 334
(D) 337
(E) 338
10. Carlos desenha cinco figuras em seu caderno. Depois, em cada uma delas, ele coloca Lili, sua formiguinha de estimação, no ponto A, e um pedacinho de planta no ponto B. Lili faz então o caminho mais curto de um ponto até outro, mas sem sair da figura.



Em qual das figuras Lili percorrerá a **menor** distância?

- (A) Na figura 1 (B) Na figura 2 (C) Na figura 3 (D) Na figura 4 (E) Na figura 5
11. Veja abaixo um *kakuro*, jogo de raciocínio:

	6	12
4		
14		

O objetivo deste passatempo é preencher as casas em branco com números de inteiros 1 a 9, **sem repetição**, de tal maneira que a soma dos dois números em cada linha e em cada coluna seja o indicado. Assim, o *kakuro* acima deveria ser preenchido do modo a seguir:

	6	12
4	1	3
14	5	9

Pois, $4 = 1 + 3$, $14 = 5 + 9$, $6 = 1 + 5$ e $12 = 3 + 9$.

Resolva o *kakuro* abaixo, e então responda: qual número deve ser colocado na casa com o ponto de interrogação?

	8	16
13		
11		?

(A) 2 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

12. André, Bruna e Carolina são professores e cada um ensina apenas uma disciplina dentre Matemática, Português e Ciências. Joãozinho, aluno novo no colégio, não conhecia ninguém e estava ansioso para saber quais seriam seus professores. Então um grupo de três alunos resolveu fazer uma pegadinha com Joãozinho e combinaram cada um dizer uma frase para ele, mas de modo que **apenas uma das frases fosse verdadeira!**

As frases ditas foram:

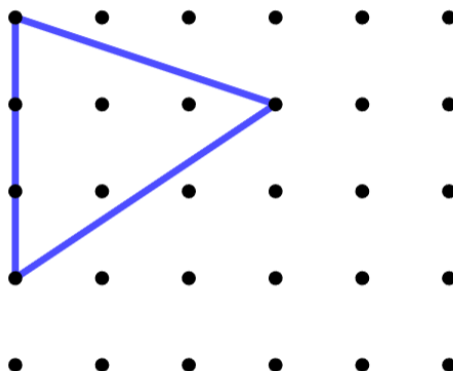
- “A Bruna não é a professora de Português.”
- “A Carolina é a professora de Português.”
- “O André não é o professor de Ciências.”

Em qual das linhas da tabela abaixo está corretamente indicada a disciplina ministrada por cada professor?

	André	Bruna	Carolina
(A)	Ciências	Matemática	Português
(B)	Matemática	Ciências	Português
(C)	Ciências	Português	Matemática
(D)	Matemática	Português	Ciências
(E)	Português	Ciências	Matemática

13. Existem quantos números de **cinco algarismos** tais que a **soma** de seus algarismos seja igual a 44?
- (A) 3
 (B) 4
 (C) 5
 (D) 6
 (E) 7

14. Numa malha pontilhada, como a que está abaixo, a distância entre dois pontos adjacentes (isto é, que estão imediatamente ao lado ou abaixo um do outro) é sempre a mesma. Vamos traçar triângulos que têm como vértice pontos da malha. Veja abaixo um desses triângulos:



Note que o triângulo da figura tem **em seu interior** três pontos - não incluímos na contagem os vértices e nem os pontos que estão exatamente em cima dos lados do triângulo. Dentre os triângulos que podemos desenhar, **no máximo** quantos pontos um triângulo pode ter em seu interior?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
15. Paulo consegue juntar várias moedas: quinze moedas de 10 centavos, cinco moedas de 25 centavos e duas de 50 centavos. Ele então decide comprar um pacote de balas, que custa R\$ 1,75. Mas Paulo percebe que poderia efetuar o pagamento de diversas maneiras. Por exemplo, poderia usar as quinze moedas de 10 centavos mais uma moeda de 25 centavos, ou usar três moedas de 25 centavos e duas de 50 centavos. Ao todo, de quantas maneiras diferentes Paulo conseguiria efetuar o pagamento?
- (A) 3
(B) 5
(C) 7
(D) 8
(E) 10
16. Entediados com a matemática comum, os habitantes da *Terra da Matemática Rebelde* decidiram que os algarismos passarão a representar quantidades diferentes das que estamos acostumados. Assim, por exemplo, o algarismo “2” não indicará mais aquilo que entendemos por *dois*, mas alguma outra quantidade (de zero a nove). O mesmo para todos os outros nove algarismos – **representam quantidades de zero a nove, mas sempre diferentes da normal**. Eis algumas contas no sistema de representação deste país exótico:

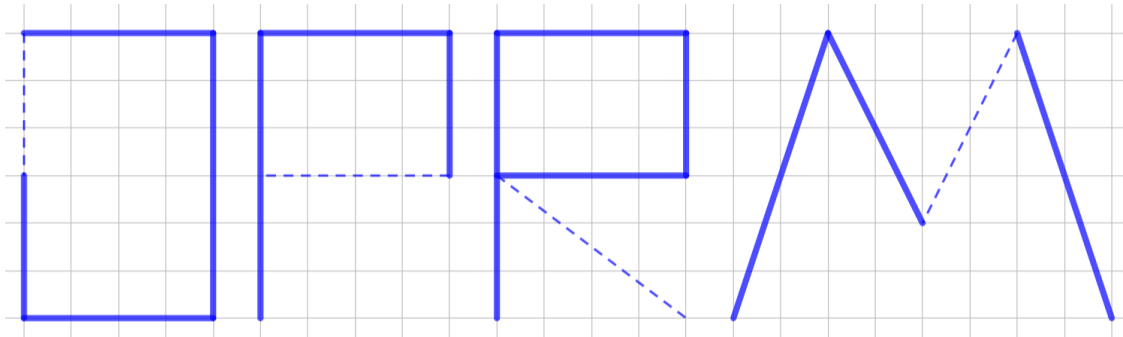
$$7 + 7 = 7$$

$$9 + 9 = 37$$

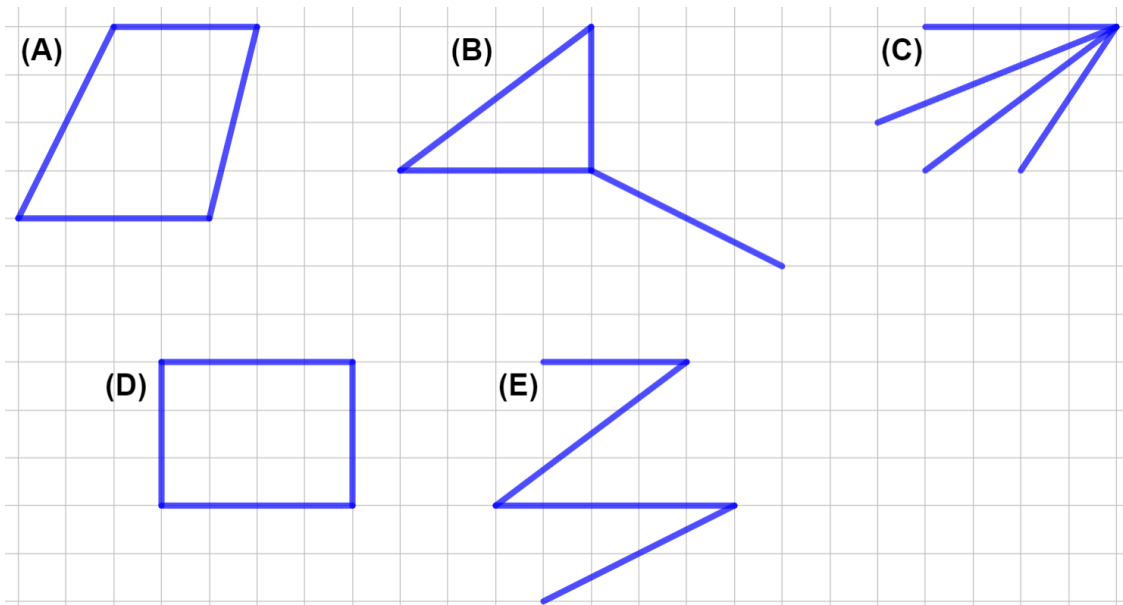
Na Terra da Matemática Rebelde, qual seria o resultado da conta $37 + 9$?

- (A) 35 (B) 39 (C) 46 (D) 73 (E) 97

17. Sobre uma malha quadriculada foram desenhadas as letras O, P, R e M. Depois foram retirados alguns pedaços dessas letras – das partes que aparecem pontilhadas:



Usando a mesma malha quadriculada, qual das figuras abaixo podemos formar com os pedaços retirados?

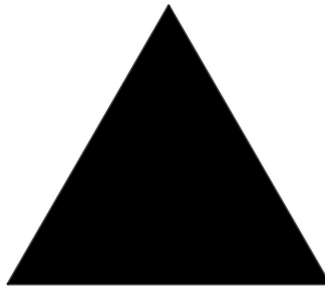


18. Helena viajou de Curitiba até Ponta Grossa, levando uma determinada quantidade de tempo (um número natural, em minutos). Logo depois, foi de Ponta Grossa até Londrina, levando o dobro de tempo do trecho anterior. Logo depois, foi de Londrina até Foz do Iguaçu, levando o dobro de tempo do trecho anterior. Logo depois, foi de Foz do Iguaçu a Curitiba, levando o dobro de tempo do trecho anterior. Qual das alternativas abaixo é um possível valor para o tempo total da viagem?

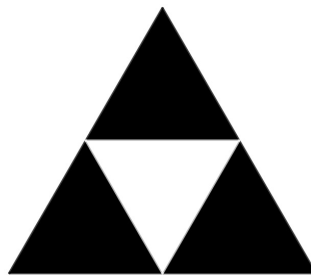
- (A) 27h45min
- (B) 28h35min
- (C) 29h05min
- (D) 30h20min
- (E) 31h50min

19. O *Triângulo de Sierpinski* é uma figura geométrica obtida através dos seguintes passos:

Etapa 0. Essa é nossa etapa inicial, na qual começamos desenhando um triângulo preto:



Etapa 1. Agora construímos um triângulo utilizando os pontos médios dos lados do triângulo da etapa inicial e retiramos este triângulo. Fazendo isso, obtemos os 3 triângulos pretos:



Etapa 2. Para cada um dos três triângulos acima, repetimos o que foi feito na etapa 1. Fazendo isso, obtemos os 9 triângulos pretos:



Seguindo este procedimento, quantos triângulos pretos teremos ao final da Etapa 2023?

- (A) 3×2023
- (B) 3^{2022}
- (C) $1 + 3^{2023}$
- (D) 3×2022
- (E) 3^{2023}

Observação: em algumas alternativas usamos a *potenciação*, que é uma maneira simplificada de escrever a multiplicação de um número por ele mesmo. Por exemplo, ao invés de escrever $3 \times 3 \times 3 \times 3$ (a multiplicação do 3 por ele mesmo quatro vezes), podemos escrever simplesmente 3^4 . Outro exemplo: $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

20. Júlio fez vários montes de pedrinhas: um com 3 pedrinhas, outro com 4 pedrinhas, outro com 5, e assim por diante, até o último monte, que tinha 12 pedrinhas. Ele então escolheu cinco desses montes e retirou uma pedrinha de cada um deles. Depois fez o mesmo: escolheu cinco montes, e retirou uma pedrinha de cada. Júlio continuou procedendo desse modo até não ser mais possível escolher cinco montes para retirar pedrinhas. Qual é a **menor quantidade possível** de montes que restará?
- (A) Nenhum
 - (B) 1
 - (C) 2
 - (D) 3
 - (E) 4

RASCUNHO