



OPRM 2023

Olimpíada Paranaense
de Matemática

OPRM 2023
Nível 3 (Ensino Médio)
Primeira Fase
02 ou 03 de junho
Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: _____

Escola: _____

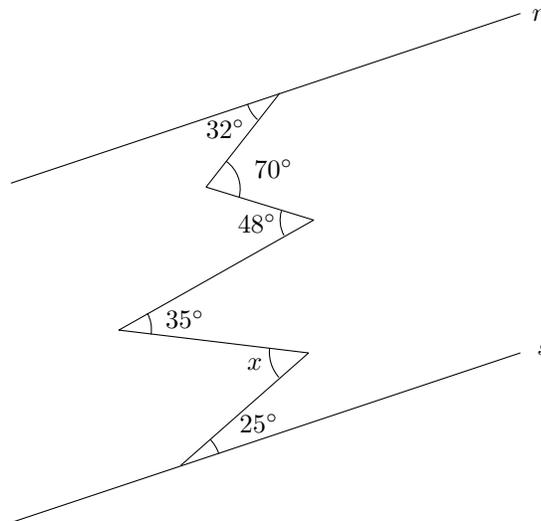
Fiscal: _____

INSTRUÇÕES

- Escreva o seu nome, o nome da sua escola e o nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 8 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou algum problema faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta a qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Você pode fazer seus cálculos e anotações ao longo deste caderno de questões. Além disso, há uma página de rascunho no verso da prova.
- As respostas finais devem ser marcadas **com cuidado** na Folha de Respostas.
- Só serão consideradas as respostas assinaladas na Folha de Respostas. O que você escrever neste caderno de questões ou em folhas de rascunho não será considerado para fins de avaliação.
- Ao finalizar a prova, entregue ao **FISCAL** a Folha de Respostas, o caderno de questões e as folhas de rascunho que você eventualmente tenha usado.

BOA PROVA!

- Um grupo de meninas estava dançando em roda. Aline era a quinta à esquerda de Cecília e a nona à direita de Cecília. Quantas meninas havia na roda?
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15
- Se $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função tal que $f(1) + \dots + f(n) = n^2$, então quanto vale $f(2023)$?
(A) 2023
(B) 2023^2
(C) 2025
(D) $2023^2 - 2023$
(E) 4045
- Dada a figura a seguir, sabendo que a reta r é paralela à reta s , qual é a medida do ângulo x , em graus?



- (A) 45°
(B) 48°
(C) 50°
(D) 52°
(E) 55°
- Quantos múltiplos de 23 existem entre 2.023 e 20.023?
(A) 783
(B) 784
(C) 801
(D) 802
(E) 805

5. Qual é a medida do perímetro de um retângulo de diagonal $\sqrt{1010}$ cm e área 377 cm^2 ?
- (A) 34 cm
 - (B) 42 cm
 - (C) 68 cm
 - (D) 84 cm
 - (E) 102 cm
6. Suponha que Pedro tenha 3 dados, um azul, um branco e um verde. Qual a probabilidade dele lançar os três dados de modo que as faces que ficaram viradas para cima sejam números primos cuja soma resulta em um número par?
- (A) $\frac{13}{6^3}$
 - (B) $\frac{36}{6^3}$
 - (C) $\frac{27}{6^3}$
 - (D) $\frac{12}{6^3}$
 - (E) $\frac{28}{6^3}$
7. Quanto vale o perímetro de um hexágono regular de área $96\sqrt{3}$?
- (A) 96
 - (B) 48
 - (C) $24\sqrt{3}$
 - (D) $36\sqrt{3}$
 - (E) 72
8. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há no mínimo duas mil e vinte e três que fazem aniversário no mesmo mês?
- (A) 24.253
 - (B) 24.264
 - (C) 24.265
 - (D) 24.276
 - (E) 24.277

9. Qual é o último dígito de 19^{2023} ?
- (A) 1
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 9
10. Se $x \geq y \geq z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $xy = 15$, $xz = 13$ e $yz = 56$, então o valor de $x - y - z$ é:
- (A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8
11. Sejam a, b, c raízes distintas de $x^3 + ix^2 - x - i = 0$, onde $i^2 = -1$. Qual é o valor de $(abc)^{2023}$?
- (A) 1
(B) -1
(C) i
(D) $-i$
(E) $1 + i$
12. Quantos são os inteiros não negativos a, b, c tais que $a + 2b + 3c = 12$?
- (A) 25
(B) 19
(C) 16
(D) 11
(E) 8
13. Se r_1, r_2, r_3 são as raízes do polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$, então quanto vale $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$?
- (A) $\frac{a^2 - 2b}{c^2}$
(B) $\frac{a^2}{c^2}$
(C) $\frac{a^2 + b}{c^2}$
(D) $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$
(E) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

14. Qual o valor da expressão a seguir?

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

- (A) $\sqrt{2} - 1$
- (B) $\sqrt{2}$
- (C) 2
- (D) 4
- (E) $\frac{1}{2}$

15. Determine o coeficiente de x^{2023} no desenvolvimento de $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{2021}$.

- (A) $\binom{2021}{674}$
- (B) $\binom{2021}{1011}$
- (C) $\binom{2021}{1348}$
- (D) $\binom{2021}{2019}$
- (E) $\binom{2023}{2021}$

16. Qual é o menor inteiro positivo que possui exatamente 77 divisores positivos?

- (A) 124.416
- (B) 248.832
- (C) 373.248
- (D) 746.496
- (E) 4.478.976

17. Um estacionamento possui 12 vagas, uma ao lado da outra e em uma única fileira. De quantos modos é possível estacionar 4 carros idênticos nesse estacionamento de modo que não haja carros estacionados em vagas consecutivas?

- (A) 70
- (B) 126
- (C) 210
- (D) 330
- (E) 495

18. Pedro, novamente com seus três dados distintos, decide jogá-los e obtém o valor A no dado azul, B no dado branco e C no dado verde virados para cima. Qual a probabilidade de $A + B < C$?

(A) $\frac{9}{6^3}$

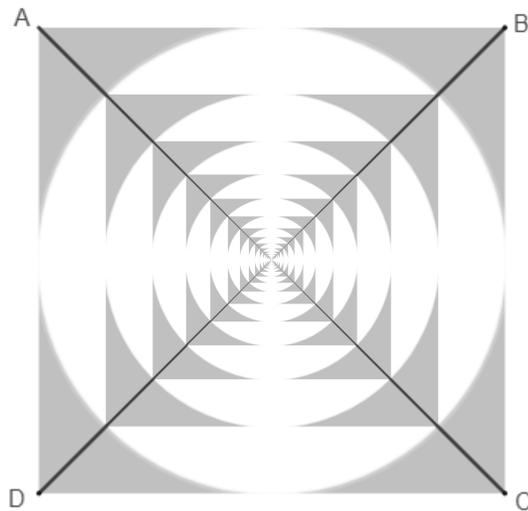
(B) $\frac{13}{6^3}$

(C) $\frac{20}{6^3}$

(D) $\frac{26}{6^3}$

(E) $\frac{27}{6^3}$

19. Seja ABCD um quadrado hachurado de lado 1 com diagonais AC e BD. Decidimos então, inscrever um círculo de cor branca nele. A partir disso, repetimos o seguinte processo infinitamente: Em cada círculo branco, inscrevemos um quadrado hachurado e em cada quadrado hachurado inscrevemos um círculo branco, conforme a figura abaixo. Sabendo disso, quanto vale a área hachurada da figura?



(A) $\sqrt{2} \left(3 - \frac{2\pi}{3} \right)$

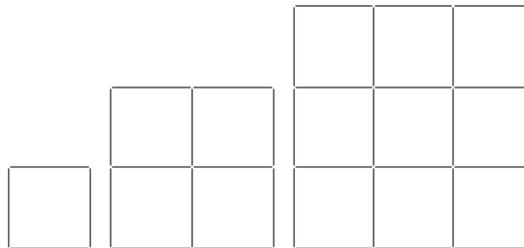
(B) $2\sqrt{2} - \pi$

(C) $1 - \frac{\pi}{4}$

(D) $4 - \pi$

(E) $2 - \frac{\pi}{2}$

20. Conforme podemos averiguar pelas imagens abaixo, é preciso 4 segmentos para fazer um quadrado de lado 1, 12 segmentos para fazer um quadrado de lado 2 e 24 segmentos para fazer um quadrado de lado 3. Quantos segmentos são necessários para fazer um quadrado de lado 2023?



- (A) 16.378.308
(B) 8.189.104
(C) 4.094.552
(D) 2.047.276
(E) 1.023.638

RASCUNHO