OPRM 2022
Segunda Fase
Nível 3
24/09/22
Duração: 4 horas

1. Sejam α e β números inteiros tais que $\alpha + \beta\sqrt{7} = 2022$. Determine todos os valores possíveis de α e β.

Solução:

Se $\beta = 0$, então $\alpha = 2022$. Logo, $(\alpha, \beta) = (2022, 0)$ é uma solução de $\alpha + \beta\sqrt{7} = 2022$.

Suponha, por absurdo, que existe $\beta \neq 0$ que satisfaça a equação de $\alpha + \beta\sqrt{7} = 2022$. Então, temos:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\sqrt{7} &= 2022 \\ \beta\sqrt{7} &= 2022 - \alpha \\ \sqrt{7} &= \frac{2022 - \alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Note que $\dfrac{2022 - \alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, visto que $2022 - \alpha \in \mathbb{Z}$ e $\beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Mas $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$. Contradição!

Portanto, a única solução possível é $(\alpha, \beta) = (2022, 0)$.

2. Determine a maior quantidade n de inteiros positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ com os quais podemos tornar verdadeiras as equações $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2022$ e $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 2022$.

Solução:

Considerando a decomposição de 2022 em fatores primos, temos $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, logo, a menos de multiplicar arbitrariamente por 1, as possibilidades de escrever 2022 como produto de inteiros positivos são: $2022, 1011 \cdot 2, 674 \cdot 3, 337 \cdot 6$ e $2 \cdot 3 \cdot 337$. Com esses produtos, basta considerar os demais inteiros iguais a 1 até totalizar a soma 2022 sem alterar a multiplicação.

Tomando $x_1 = 2022$, qualquer $x_n = 1$ que se acrescente resultará em uma soma maior que 2022, logo, só se pode usar um inteiro.

Tomando $x_1 = 1011, x_2 = 2$ temos $x_1 + x_2 = 1013$, e $x_3 + \ldots + x_n$ deve totalizar 1009, sendo, portanto, necessários 1009 inteiros positivos iguais a 1, resultando em 1011 inteiros ao todo.

Tomando $x_1 = 674, x_2 = 3$ temos $x_1 + x_2 = 677$, e $x_3 + \ldots + x_n$ deve totalizar 1345, sendo, portanto, necessários 1345 inteiros positivos iguais a 1, resultando em 1347 inteiros ao todo.

Tomando $x_1 = 337, x_2 = 6$ temos $x_1 + x_2 = 343$, e $x_3 + \ldots + x_n$ deve totalizar 1679, sendo, portanto, necessários 1681 inteiros positivos iguais a 1, resultando em 1011 inteiros ao todo.

Por fim, tomando $x_1 = 337, x_2 = 3, x_3 = 2$ temos $x_1 + x_2 + x_3 = 342$, e $x_4 + \ldots + x_n$ deve totalizar 1680, sendo, portanto, necessários 1680 inteiros positivos iguais a 1, resultando em 1683 inteiros ao todo.

Por inspeção entre as possibilidades, conclui-se que a maior quantidade de inteiros possível para tornar simultaneamente verdadeiras as equações é 1683.

3. Álvaro, Bruna e Carlos são irmãos e participam de um grupo de excursão juntamente com outras onze pessoas. Sabe-se que este grupo deverá formar quatro equipes, com respectivamente dois, três, quatro e cinco integrantes.

   (a) Quantas equipes podem ser organizadas sabendo que Álvaro, Bruna e Carlos não podem ficar na mesma equipe?

   (b) No final da excursão ocorrerá o sorteio de uma mochila personalizada. Primeiramente uma equipe é sorteada e, depois, dentre os membros desta equipe é sorteado alguém para receber a mochila. Se Álvaro, Bruna e Carlos não estão na mesma equipe e também não estão na equipe com dois integrantes, qual é a probabilidade de algum deles ganhar a mochila?

Solução:

(a) Sabendo que os irmãos estão todos em equipes diferentes, vamos separar o problema em casos.

Caso 1: A equipe com dois integrantes não possui nenhum dos irmãos.

Neste caso, há $3! \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{11!}{4 \cdot 4!}$ maneiras de organizar as equipes.

Caso 2: A equipe com três integrantes não possui nenhum dos irmãos.

Neste caso, há $3! \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^3 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{11!}{6 \cdot 4!}$ maneiras de organizar as equipes.

Caso 3: A equipe com quatro integrantes não possui nenhum dos irmãos.

Neste caso, há $3! \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 = \frac{11!}{8 \cdot 4!}$ maneiras de organizar as equipes.

Caso 4: A equipe com cinco integrantes não possui nenhum dos irmãos.

Neste caso, há $3! \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = \frac{11!}{10 \cdot 4!}$ maneiras de organizar as equipes.

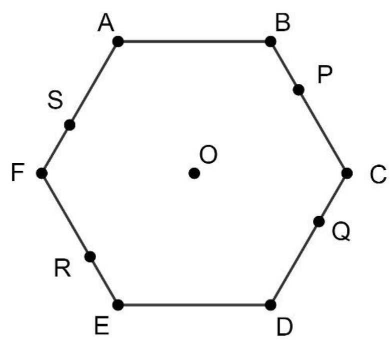
Total: O total de equipes que podem ser organizadas é

$$\frac{11!}{4!} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \right) = \frac{77 \cdot 11!}{4! \cdot 5!} = 1.067.220.$$

(b) Se os irmãos estão todos em equipes diferentes e não estão na equipe com dois integrantes, então a probabilidade de algum deles ganhar a mochila é

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} = \frac{47}{240}.$$

4. Na figura, o hexágono $ABCDEF$ é regular, e seu centro é O. Os pontos P, Q, R e S estão sobre os lados BC, CD, EF, e FA respectivamente, de modo que os segmentos BP, CQ, ER e FS têm todos a mesma medida.



(a) Prove que as diagonais do quadrilátero $PQRS$ se intersectam no ponto O.

(b) Prove que $PQRS$ é um retângulo.

Solução:

(a) Seja M a interseção entre os segmentos CF e RP. Comparando os triângulos obtidos FRM e CPM, temos que $R\hat{F}M = P\hat{C}M = 60°$, $F\hat{M}R = C\hat{M}P$. Além disso, os lados $\overline{FR}$ e $\overline{CP}$ são congruentes. Logo, por congruência de Ângulo, Lado e Ângulo oposto, concluímos que os triângulos FRM e CPM são congruentes. Consequentemente, os lados FM e MC são congruentes, implicando que M é o ponto médio do segmento FC. Assim, sendo, M coincide com o ponto O.

Tomando N como a interseção entre SQ e FC, considerando os triângulos FSN e CPN, prova-se de modo análogo que N coincide com O. Logo, o ponto O pertence simultaneamente às duas diagonais.

(b) Seja l a medida do lado do hexágono, e x a medida do segmento $\overline{FS}$. Como $\overline{RE}$ também mede x, temos que $\overline{FR}$ mede $l - x$. Além disso, como o hexágono é regular, temos que $\overline{FO}$ mede l.

Seja y a medida de $\overline{SO}$ e z a medida de $\overline{RO}$. Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos FSO e FRO, obtemos:

$$y^2 = l^2 + x^2 - 2 \cdot l \cdot x \cdot \cos(60°) = l^2 + x^2 - l \cdot x.$$

$$z^2 = l^2 + (l-x)^2 - 2 \cdot l \cdot (l-x) \cdot \cos(60°) = 2l^2 - 2lx + x^2 - l^2 + lx = l^2 + x^2 - lx.$$

Como $y^2 = z^2$ e y e z são ambos positivos, segue-se que $y = z$.

Como O é ponto médio do segmento RP, concluímos que os segmentos $\overline{RO}, \overline{SO}, \overline{PO}$ todos têm a mesma medida. Considerando os triângulos ROS e SOP, temos as igualdades dos ângulos $O\hat{R}S = O\hat{S}R$ e $O\hat{P}S = O\hat{S}P$. Por sua vez, a soma dos ângulos do triângulo RSP fornece:

$$O\hat{R}S + (O\hat{S}R + O\hat{S}P) + O\hat{P}S = 2O\hat{S}R + 2O\hat{S}P = 2R\hat{S}P = 180^\circ.$$

Logo, o ângulo $R\hat{S}P$ é reto. De modo análogo pode-se provar que os demais ângulos de $PQRS$ são todos retos, e, portanto, $PQRS$ é um retângulo.

5. Em uma dízima periódica, o *comprimento do período* é a quantidade de algarismos que se repetem ciclicamente. Por exemplo, em $\frac{1}{7} = 0,142857142857\cdots$, o período que se repete é 142857, e seu comprimento é 6 algarismos.
   (a) Determine o comprimento do período de $\frac{1}{99^2}$.
   (b) Determine o comprimento do período de $\frac{1}{101^2}$.

Solução:

(a) Considerando a divisão de 1 por 99, temos

$$\frac{1}{99} = 0,01010101\ldots = 0,\overline{01}.$$

Consideremos agora as sequências de repetições dos algarismos 01, para determinar qual é a menor dessas sequências que resulta em um número divisível por 99. Para isso, basta aplicar simultaneamente os critérios de divisibilidade por 9 e por 11. Como todos algarismos não nulos são iguais a 1, o total de sequências de algarismos de um número deve ser múltiplo de 9. Por sua vez, como apenas algarismos de posição ímpar são não nulos, é preciso que o total de sequências seja múltiplo de 11. Logo, o número dado pela repetição de 01 99 vezes é múltiplo de 99. Como cada sequência tem 2 algarismos, temos uma sequência de 198 algarismos. Logo, o comprimento do período deve ser divisor de 198.

Inspecionando o resto de 10^d módulo $99^2 = 9801$, para d divisor positivo de 198, verifica-se que apenas 10^{198} tem resto 1. Portanto, o comprimento do período é de 198 algarismos.

(b) A divisão de 1 por 101 nos fornece

$$\frac{1}{101} = 0,00990099\ldots = 0,\overline{0099}.$$

De modo análogo ao item anterior, determinemos a menor sequência de repetições dos algarismos 0099 que resulta em um número divisível por 101. É possível obter um critério de divisibilidade por 101 se considerarmos que 10^2 é congruente a -1 módulo 101, e, portanto, 10^3 é congruente a -10 e 10^4 é congruente a 1 nesse mesmo módulo. No módulo 101, cada ciclo de 0099 tem a seguinte congruência:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 10^{d+3} + 0 \cdot 10^{d+2} + 9 \cdot 10^{d+1} + 9 \cdot 10^d &\equiv 10^d[0 \cdot (-10) + 0 \cdot (-1) + 9 \cdot 10 + 9] \pmod{101} \\ &\equiv 99 \pmod{101} \end{aligned}$$

Como 99 e 101 são coprimos, é necessário que o total de repetições da sequência 0099 seja múltipla de 101. Como na dízima $0,\overline{0099}$ cada sequência tem 4 algarismos, temos que a cada 404 algarismos da dízima, a segunda divisão por 101 será exata. Portanto, o comprimento do período deve ser divisor de 404.

Como no item anterior, inspecionando as congruências de 10^d módulo $101^2 = 10201$, para d divisor de 404, obtemos $10^1 \equiv 10 \pmod{10201}$, $10^2 \equiv 100 \pmod{10201}$, $10^4 \equiv -201 \pmod{10201}$, $10^{101} \equiv 515 \pmod{10201}$, $10^{202} \equiv -1 \pmod{10201}$ e $10^{404} \equiv 1 \pmod{10201}$. Logo, o comprimento do período deve ser de 404 algarismos.

6. Seja λ uma raiz de $x^5 - 1 = 0$, com $\lambda \neq 1$.
   (a) Mostre que λ^2, λ^3 e λ^4 são distintos entre si e que são raízes de $x^5 - 1 = 0$.
   (b) Mostre que $(x-\lambda)(x-\lambda^2)(x-\lambda^3)(x-\lambda^4) = \dfrac{x^5-1}{x-1}$.
   (c) Mostre que $|1-\lambda| \cdot |1-\lambda^2| \cdot |1-\lambda^3| \cdot |1-\lambda^4| = 5$.
   (d) Determine o valor de

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

Solução:

(a) Por hipótese, λ é raiz de $x^5 - 1 = 0$, com $\lambda \neq 1$. Então, $\lambda^5 - 1 = 0$, o que implica que $\lambda^5 = 1$. Note também que $\lambda \neq 0$.

Seja então λ^k com $k = 2, 3, 4$. Então $(\lambda^k)^5 - 1 = (\lambda^5)^k - 1 = 1^k - 1 = 1 - 1 = 0$.

Suponha, por absurdo, que $\lambda^2 = \lambda^3$. Dividindo ambos os lados por λ^2, obtemos $\lambda = 1$, o que contradiz nossa hipótese.

Suponha, por absurdo, que $\lambda^3 = \lambda^4$. Dividindo ambos os lados por λ^3, obtemos $\lambda = 1$, o que, novamente, contradiz nossa hipótese.

Suponha, por absurdo, que $\lambda^2 = \lambda^4$. Dividindo ambos os lados por λ^2, obtemos $\lambda^2 = 1$, e portanto, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Contradição, visto que -1 não é raiz de $x^5 - 1 = 0$ e por hipótese, $\lambda \neq 1$.

Logo, λ^2, λ^3 e λ^4 são distintos entre si e são raízes de $x^5 - 1 = 0$.

(b) Basta mostrar que $(x-1)(x-\lambda)(x-\lambda^2)(x-\lambda^3)(x-\lambda^4) = x^5 - 1$.

Defina $p(x) = x^5 - 1$. Como $p \in \mathbb{C}[x]$ e o grau de p é 5, então o Teorema Fundamental da Álgebra garante que p possui 5 raízes complexas. As raízes de p são 1, λ, λ^2, λ^3 e λ^4, como visto no item anterior. Sabemos que o polinômio $p(x)$ possui um fator $(x-\alpha)$ se, e só se, $p(\alpha) = 0$. Como $p(1) = p(\lambda) = p(\lambda^2) = p(\lambda^3) = p(\lambda^4) = 0$, então $(x-1)(x-\lambda)(x-\lambda^2)(x-\lambda^3)(x-\lambda^4) = p(x) = x^5 - 1$.

(c) Pelo item anterior, $(x-\lambda)(x-\lambda^2)(x-\lambda^3)(x-\lambda^4) = \dfrac{x^5-1}{x-1}$. Dividindo $x^5 - 1$ por $x - 1$, obtemos $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Então:

$$|(x-\lambda)(x-\lambda^2)(x-\lambda^3)(x-\lambda^4)| = \left|\frac{x^5-1}{x-1}\right| = |x^4 + x^3 + x^2 + x + 1|.$$

Tomando $x = 1$, temos:

$$|1-\lambda| \cdot |1-\lambda^2| \cdot |1-\lambda^3| \cdot |1-\lambda^4| = |1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1| = 5.$$

(d) Como λ^k é raiz de $x^5 - 1 = 0$, então $\lambda^k = \cos(\frac{2k\pi}{5}) + i \cdot \mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{5})$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Usando a definição de módulo de um número complexo, temos:

$$\begin{aligned} |1 - \lambda^k| &= \sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)^2 + \mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{5}\right)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2}} \\ &= 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

Pelo item anterior, temos $|1-\lambda| \cdot |1-\lambda^2| \cdot |1-\lambda^3| \cdot |1-\lambda^4| = 5$. Fazendo as respectivas substituições, encontramos:

$$\begin{aligned} &|1-\lambda| \cdot |1-\lambda^2| \cdot |1-\lambda^3| \cdot |1-\lambda^4| = 5 \\ \Rightarrow\ &2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cdot 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 5 \\ \Rightarrow\ &16 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 5 \\ \Rightarrow\ &\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$