

1. Enunciado por Euclides por volta do século III a.C. e demonstrado por Carl Friedrich Gauss em 1796, o Teorema Fundamental da Aritmética afirma que todo número inteiro, positivo e maior do que 1, pode ser decomposto num produto de números primos, sendo essa uma decomposição única a menos de permutações feitas nos fatores do produto.

Um caso particular desse Teorema é que o número 22022 pode ser escrito como 22022 = $p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_r^{n_r}$, tal que r é a quantidade de números primos distintos na decomposição, $n_1, n_2, ..., n_r$ são números inteiros positivos e $p_1 < p_2 < ... < p_r$ são números primos (inteiros positivos).

Determine o valor de cada um desses números.

Solução:

Realizamos a decomposição de 22022 em números primos:

$$22022 = 2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13$$

Comparando a expressão acima com a fórmula para 22022 descrita no enunciado, concluímos que:

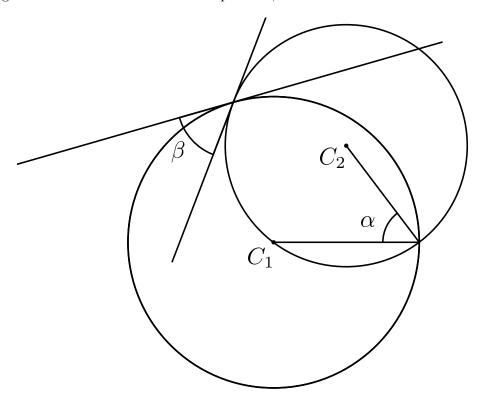
$$r = 4,$$

$$\begin{cases}
p_1 = 2 \\
p_2 = 7 \\
p_3 = 11 \\
p_4 = 13
\end{cases}$$
e
$$\begin{cases}
n_1 = 1 \\
n_2 = 1 \\
n_3 = 2 \\
n_4 = 1
\end{cases}$$

Além disso, nessas condições, temos que $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$.



2. Na figura, há duas circunferências que se intersectam. Seja α o ângulo formado ao ligar os centros das circunferências a um dos pontos de intersecção e β o ângulo formado pelas retas tangentes às circunferências. Mostre que $\alpha = \beta$.

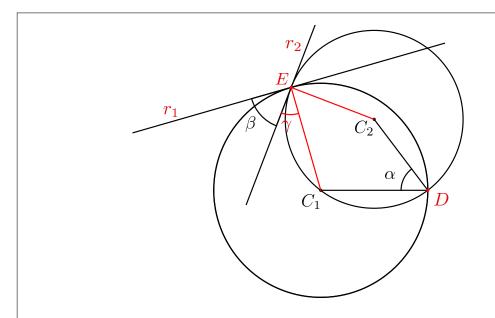


Solução:

Começaremos dando nomes aos objetos que vamos usar. Sejam:

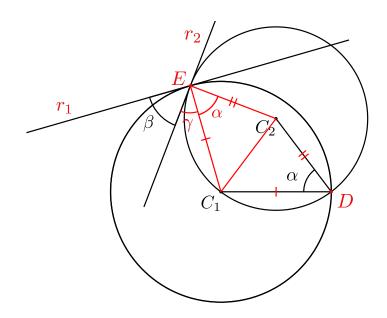
- D a interseção entre as circunferências que é vértice do ângulo α ;
- E a intersecção entre as retas tangentes às circunferências;
- r_1 a reta tangente à circunferência de centro C_1 ;
- r_2 a reta tangente à circunferência de centro C_2 ;
- γ o ângulo formado entre o segmento $\overline{C_1E}$ e a reta r_2 .





Vamos mostrar que $\angle C_1EC_2=\alpha$ utilizando congruência de triângulos. De fato, $\Delta C_1EC_2\cong \Delta C_1DC_2$ pela congruência de triângulos LLL:

- L. $\overline{C_1C_2}$ é um lado em comum.
- L. $\overline{C_1E} = \overline{C_1D}$, pois ambos são o raio do círculo de centro C_1 .
- L. $\overline{C_2E} = \overline{C_2D}$, pois ambos são o raio do círculo de centro C_2 .



OPRM 2022 Segunda Fase Nível 2 24/09/2022 Duração: 4 horas



A chave para finalizar o exercício é utilizar que uma reta tangente à uma circunferência forma um ângulo reto com seu raio. Logo,

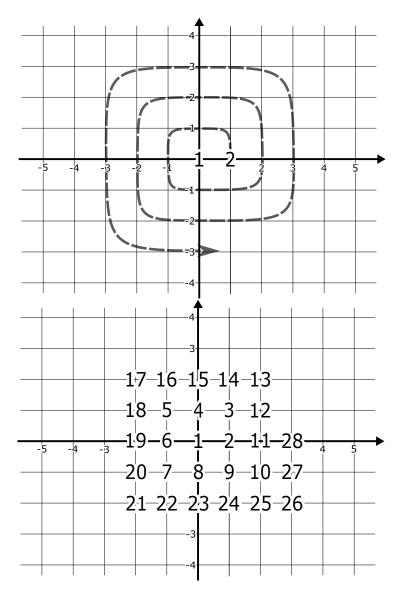
$$\beta + \gamma = 90^{\circ}$$

$$\alpha + \gamma = 90^{\circ}$$

Portanto, $\alpha = \beta$.



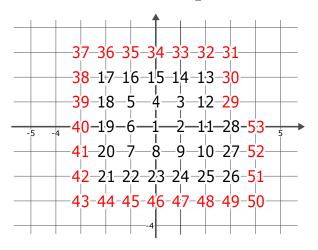
3. Eliana decidiu enumerar as coordenadas inteiras do plano cartesiano. Ela começou por marcar o ponto (0,0) com o número 1, depois marcou o ponto (1,0) com 2 e os próximos números foram marcados seguindo uma espiral no sentido anti-horário, como ilustram as figuras. Por exemplo, a coordenada (-1,1) é marcada com 5 e a coordenada (3,0) é marcada com 28.



- a) Com qual número é marcada a coordenada (4,0)?
- b) Qual coordenada é marcada com o número 81?
- c) Quais são as coordenadas marcadas com números que são quadrados de números ímpares? Justifique sua resposta.
- d) Qual coordenada é marcada com 2022?

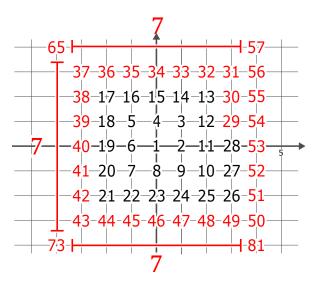
Solução:

a) Seguindo a regra, marcamos os números até chegar na coordenada desejada.



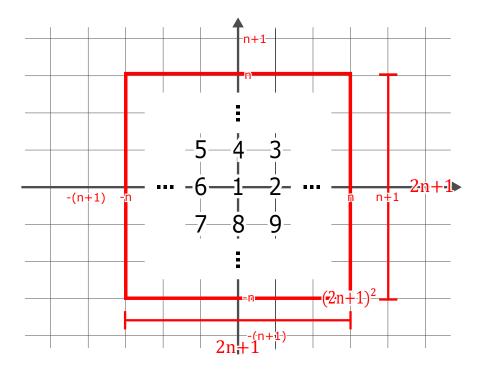
Portanto, a coordenada (4,0) é marcada com o número 53.

b) Poderíamos marcar as coordenadas até chegar ao número 81, mas vamos poupar o trabalho de escrever todos os números, utilizando-se do seguinte método: deixamos de escrever os números nas partes "retas". A partir do 57, notamos que há 7 números entre os vértices, que é a mesma quantidade de números que o "lado" da camada anterior (31 a 37) possui. Perceba que se existem 7 números entre 57 e o próximo vértice, devemos somar 8, e não 7.



Seguindo esse raciocínio, descobrimos que o número 65 tem coordenada (-4,4), o número 73 tem coordenada (-4,-4) e, finalmente, o número 81 tem coordenada (4,-4).

c) Com as coordenadas que conhecemos até agora, notamos que os quadrados de números ímpares 1,9,25,81 estão descendo em diagonal. Baseado nesses exemplos, estipulamos a seguinte hipótese: o número $(2n+1)^2$ está na coordenada (n,-n). Vamos utilizar um argumento geométrico:



Traçamos um quadrado centrado na origem com vértices (-n,n), (n,n), (-n,-n), (n,-n). Note que o lado do quadrado é 2n+1, e a quantidade de números que está no quadrado é igual a área dele. Estão, então, os números de 1 ao $(2n+1)^2$. Por construção, o último número está no vértice (n,-n). Portanto, o número $(2n+1)^2$ está na coordenada (n,-n).

- d) Pelo item anterior, $2025=45^2=(2\cdot 22+1)^2$ está na coordenada (22, –22). Então, regressando os números seguindo a construção,
 - 2024 está na coordenada (21, -22);
 - 2023 está na coordenada (20, -22);
 - 2022 está na coordenada (19, -22).



4. O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético que pode ser utilizado para calcular coeficientes binomiais com facilidade. Ele pode ser construído da seguinte forma:

linha 0:	1						linha 0:	1		
linha 1:	1	1					linha 1:	1	+ 1	
linha 2:	1		1				linha 2:	1	2 1	
linha 3:	1			1			linha 3:	1	3+3 1	
linha 4:	1				1		linha 4:	1	4 6 4	1
ŧ	÷					٠.	i			

Primeiro, escrevemos o número 1 de forma repetida vertical e diagonalmente para iniciar o triângulo, como mostra a primeira imagem.

Depois, completamos o triângulo de forma que a soma dos números nas posições n e n+1 de uma linha i sempre resulte no número na posição n+1 da linha i+1, como mostram os dois exemplos de soma na segunda imagem.

- a) Qual número ocupa a 6ª posição na linha 10 do Triângulo de Pascal?
- b) Prove que a soma dos números de uma linha n será igual a 2^n , para todo n natural.

Solução:

a) Façamos a construção do Triângulo de Pascal até a 10^a linha, de acordo com a regra para construção sugerida no enunciado. Sendo i o número de cada linha, obtemos:

```
i = 0
            1
i = 1
            1
                1
i = 2
            1
                2
                     1
i = 3
            1
                3
                     3
                         1
                     6
                              1
i=4
            1
                4
                         4
i = 5
            1
                5
                    10
                         10
                              5
                                   1
i = 6
            1
                6
                    15
                         20
                              15
                                   6
                                        1
i = 7
            1
                7
                    21
                         35
                              35
                                   21
                                        7
                                              1
            1
                8
                    28
                                        28
i = 8
                         56
                              70
                                   56
                                              8
                                                  1
                9
i = 9
            1
                    36
                             126 126
                                                  9
                                                       1
                         84
                                        84
                                             36
i = 10
            1
                10
                    45
                        120 210 252 210 120 45
                                                      10
                                                           1
```



Logo, o número que ocupa a 6ª posição na linha 10 é **252**. Caso os números da primeira coluna sejam considerados como ocupantes da "posição zero" de cada linha, então conclui-se que o número ocupando a 6ª posição na linha 10 é **210**. Ambos os resultados são corretos, desde que haja concordância com a interpretação feita quanto às posições dos números nas linhas.

Perceba também que, seguindo a regra de construção do Triângulo de Pascal descrita no enunciado, não era necessário calcular todos os números das linhas. Calculando os números do Triângulo até a 6ª posição de cada linha já seria suficiente para obter o resultado pedido.

Solução Alternativa para o item (a):

Percebendo o padrão que os números apresentam no Triângulo de Pascal, é possível concluir que o número ocupando a 6^a posição da linha 10 é igual a $\binom{10}{5}$ ou $\binom{10}{6}$, de acordo com a interpretação tomada para a posição dos números nas linhas.

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \, 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5}!}{\cancel{5}! \, 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{5040}{20} = 252$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{0}!}{\cancel{0}! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 7}{3} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

b) Nesta resoulução, leve em consideração que o primeiro número de cada linha está ocupando a posição zero da linha. A mesma demonstração que realizaremos aqui pode ser feita considerando o primeiro número de cada linha como ocupando a posição um: aqui estamos apenas tomando uma convenção para o melhor entendimento da solução.

Seja n um número natural.

Considere como P(n) a afirmação: "A soma dos números da linha n é igual a 2^n ".

Seja I o conjunto formado por todos os números naturais para os quais a afirmação P(n) é verdadeira. Isto é:

$$I = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ \'e uma afirmação verdadeira}\}$$

Utilizando o Princípio da Indução Finita, mostraremos que $I = \mathbb{N}$.

Primeiramente, perceba que $0 \in I$. A soma dos números da linha $0 \notin 1 = 2^0$.

Adicionalmente, temos que $1 \in I$. A soma dos números da linha $1 \notin 1 + 1 = 2 = 2^1$.

Assim, está provada a base da indução.

Agora, suponha que $r \in I$, para r um número natural qualquer. Provaremos que $(r+1) \in I$. Para isso, devemos mostrar que a soma dos números da linha r+1 é igual a 2^{r+1} .



Observando o padrão apresentado no triângulo e seguindo a lógica de sua construção, podemos tomar algumas conclusões:

- I. Na linha r há r+1 números. E na linha r+1 há r+2 números.
- II. Os números da extremidade de cada linha (primeiro e último números) são sempre iguais a 1.
- III. O segundo e penúltimo números de cada linha r são sempre iguais a r.
- IV. Cada linha apresenta simetria. O número na posição j de uma linha r é sempre igual ao número na posição r-j.
- V. Se r é par, então a linha r apresenta um número que não se repete na simetria.
- VI. Se r é impar, então todos os números da linha r se repetem na simetria.

Podemos então escrever, genericamente, os números da linhas r e r+1, respectivamente, da seguinte forma:

em que a,b,c,x,y,z são números cujo valor é desconhecido, assim como os números implícitos nas reticências. Além disso, chamaremos de S a soma dos números da linha r+1.

Perceba que, aplicando a regra de construção do triângulo, sabemos que:

$$\begin{cases} 1+r = r+1 \\ r+a = x \\ a+b = y \\ b+c = z \\ \dots \\ c+b = z \\ b+a = y \\ a+r = x \\ r+1 = r+1 \end{cases}$$

Veja que a soma de todos os números presentes nesse sistema é igual a

$$(r+1) + x + y + z + \dots + z + y + x + (r+1) = S - 2,$$

visto que o lado esquerdo da equação representa a soma dos números da linha r + 1, mas excluíndo os dois números das extremidades, que são iguais a 1.

Se r+1 for par, temos que r é um número ímpar. Então na linha r todos os termos se repetem. Podemos então substituir as variáveis x,y,z,w e todas as outras da linha r+1 pelas somas equivalentes da linha r. Por exemplo, substituiremos x=r+a e y=a+b, então x+y se torna r+a+a+b (confira o sistema de equações). Faremos isso para todas as variáveis da soma:



$$1 + r + r + a + a + b + b + c + c + \dots + c + c + b + b + a + a + r + r + 1 = S - 2$$

Somando 2 a ambos os lados da equação:

$$(1+r+r+a+a+b+b+c+c+...+c+c+b+b+a+a+r+r+1)+2=S-2+2$$

$$\Rightarrow 1 + (1 + r + r + a + a + b + b + c + c + \dots + c + c + b + b + a + a + r + r + 1) + 1 = S$$

$$\Rightarrow 1+1+r+r+a+a+b+b+c+c+...+c+c+b+b+a+a+r+r+1+1=S$$

Note que todos os termos da linha r se repetem (por conta da linha ser ímpar) e além disso, cada termo sempre é usado duas vezes em soma na geração dos termos da linha seguinte (de acordo com a regra de construção do Triângulo). Por conta disso, podemos afirmar com certeza que na expressão acima temos cada número da linha r sendo somado duas vezes.

Podemos rearranjar os termos do lado esquerdo da equação da seguinte forma:

$$(1+r+a+b+c+...+c+b+a+r+1)+(1+r+a+b+c+...+c+b+a+r+1)=S$$

Perceba que a soma continua a mesma, com as mesmas variáveis e com cada número da linha r sendo somado duas vezes. Apenas mudamos a ordem das somas.

Veja que o que temos entre parênteses é exatamente a soma dos números da linha r. Fizemos a suposição, como hipótese do Princípio Indutivo, de que $r \in I$. Ou seja, a soma dos números da linha r é igual a 2^r . Substituindo essa informação na equação:

$$2^r + 2^r = S$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^r = S$$

$$\Rightarrow 2^{r+1} = S$$

Como denotamos por S a soma dos números da linha r+1, então está provado que se r+1 é um número par, $(r+1) \in I$.



Agora, se r+1 for um número ímpar, então cada termo da linha r+1 se repete uma vez. Denotando por w o último número da linha r+1 que aparece antes de se iniciar a simetria na linha, podemos escrever a soma dos números da linha r+1 como:

$$1 + (r+1) + x + y + z + \dots + w + w + \dots + z + y + x + (r+1) + 1 = S$$

Utilizaremos o sistema de equações para reescrever os termos da linha r+1 em função dos termos da linha r, assim como fizemos para o caso par. Agora, entretanto, é necessário um cuidado extra: como r+1 é ímpar, então r é par. Isso significa que na linha r haverá um número que não se repete. Chamaremos-o de d.

Fazendo as substituições:

$$1+1+r+r+a+a+b+b+c+c+...+d+d+...+c+c+b+b+a+a+r+r+1+1=S$$

Reorganizando os termos do lado esquerdo da igualdade da mesma forma que fizemos anteriormente, concluímos que

$$2\Big(1+r+a+b+c+\ldots+d+\ldots+c+b+c+r+1\Big)=S$$

O que está dentro do parênteses é exatamente a soma dos números da linha r, que pela hipótese de indução, sabemos ser igual a 2^r . Substituindo na equação:

$$2(2^r) = S$$

$$\Rightarrow 2^{r+1} = S$$

Dessa forma, obtém-se que se r+1 é um número ímpar, então $(r+1) \in I$.

Como todo número ou é par ou é impar, provamos que se $r \in I$ então $r+1 \in I$, sendo r, por hipótese, um número natural qualquer.

Também provamos a base da indução, isto é, verificamos que $0 \in I$ e $1 \in I$.

Portanto, conclui-se pelo Princípio da Indução Finita que $I = \mathbb{N}$, ou seja, a soma dos números de uma linha n é sempre igual a 2^n , para qualquer número natural n.



Solução Alternativa para o item (b):

Compreende-se esta proposição como um caso particular do Binômio de Newton. Ao perceber que os números do Triângulo de Pascal são coeficientes binomiais da forma $\binom{n}{k}$ e sabendo que a expressão do Binômio de Newton vale para qualquer número n natural, podemos aplicá-la:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a^{n-k} \cdot b^k\right)$$

Substituindo a = b = 1:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(1^{n-k} \cdot 1^k\right)$$
$$\Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Como os números de uma linha n do Triângulo de Pascal são exatamente todos os coeficientes binomiais possíveis para n, então a soma dos números dessa linha significa o somatório de todos os coeficientes binomiais de n, como descrito acima.

Portanto, está provado que a soma dos números de uma linha n é igual a 2^n , para todo n natural.

OPRM 2022 Segunda Fase Nível 2 24/09/2022 Duração: 4 horas



- 5. Uma turma de 24 alunos realizou uma viagem para um parque de diversões. Com base nisso, responda às questões abaixo:
 - a) A professora, líder da excursão, gostaria de organizar os alunos em grupos de 4 alunos cada, para que eles possam aproveitar as atrações sem que haja grandes riscos. De quantas formas é possível fazer essa divisão?
 - b) Após uma manhã de diversão, a turma se reencontra para almoçar. No pacote do parque estava incluso um buffet completo, com 20 opções diferentes de comidas para montar seu prato. Sabendo-se que um aluno pode escolher todas as 20 opções, não escolher nenhuma das opções, ou escolher qualquer número de opções entre 1 e 19, então de quantas formas ele pode montar uma refeição neste buffet?
 - c) No ônibus de volta para casa, a turma entrou em uma discussão sobre qual montanha russa do parque era a melhor: a Montanha Radical ou a Montanha Super. A professora, para decidir de vez, coletou alguns dados com base nas opiniões dos alunos:
 - 16 alunos disseram que gostaram da Montanha Radical.
 - 12 alunos disseram que gostaram tanto da Radical quanto da Super.
 - 3 alunos preferiram não opinar.

Quantos alunos gostaram apenas da montanha Super, isto é, não gostaram da Radical? E quantos alunos gostaram apenas da montanha Radical? Justifique.

Solução:

a) Dentre os 24 alunos, escolhamos 4 para formar o primeiro grupo. Isso pode ser feito de $\binom{24}{4}$ modos.

Para o segundo grupo, sobraram 20 alunos. Temos então $\binom{20}{4}$ maneiras de formá-lo.

Para o terceiro, $\binom{16}{4}$.

Para o quarto, $\binom{12}{4}$

Para o quinto, $\binom{8}{4}$.

 ${\bf E}$ para o último grupo há apenas 1 modo, visto que sobraram exatamente 4 alunos.

Pelo Princípio Multiplicativo, teríamos $\binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot 1$ maneiras de dividir os 24 alunos em grupos de 4 alunos cada.



Entretanto, é necessário considerar que esta resposta contém 6! mais maneiras de formar os grupos do que a real quantidade de possibilidades.

Isso acontece pois foi contabilizada cada divisão dos grupos 6! vezes.

Considere que cada aluno da turma é representado por uma letra do alfabeto.

Sendo cada conjunto de alunos dentro das chaves um grupo formado, perceba que realizar a divisão dos grupos como

$${a,b,c,d},{e,f,g,h},{i,j,k,l},{m,n,o,p},{g,r,s,t},{u,v,w,x}$$

resulta nos exatos mesmos grupos do que realizar a divisão como

$${e, f, g, h}, {a, b, c, d}, {i, j, k, l}, {m, n, o, p}, {q, r, s, t}, {u, v, w, x}.$$

Entretanto, ao realizar a multiplicação das combinações pelo Princípio Multiplicativo, estamos considerando essas duas divisões dos grupos como distintas.

Veja que, fixando os alunos dos grupos, podemos permutar a ordem em que os grupos são escolhidos, e ainda obteremos os mesmos grupos sendo formados.

Como são montados 6 grupos de alunos, então existem 6! permutações possíveis entre a escolha deles.

Estamos considerando 6! vezes mais resultados, então devemos dividir o resultado que obtivemos por 6! para obter a real quantidade de possibilidades.

Portanto, a quantidade de formas que podemos fazer a divisão dos alunos é igual a

$$\frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot 1}{6!}$$

b) Para calcular tais possibilidades, primeiro o aluno deve decidir quantas opções ele escolherá.

Se optar por escolher todas as opções, há 1 maneira de realizar tal escolha, visto que a única possibilidade é escolher as 20.

Se optar por não escolher nenhuma das opções, há 1 modo de realizar esta escolha: apenas não pegar nada.

Agora, se o aluno optar por escolher exatamente 1 entre as 20 opções, há $\binom{20}{1} = 20$ maneiras de realizar esta escolha.

E se o aluno optar por escolher exatamente 2 dentre as 20 opções, tal procedimento pode ser feito de $\binom{20}{2}$ modos (Combinação de 20 elementos, escolha 2).

E dessa forma segue para todos os números naturais até o 19.

Se o aluno optar por escolher 19 das 20 opções, ele terá $\binom{20}{19}$ opções de fazer a seleção das comidas.



Como há 20 possibilidades diferentes, dependendo da quantidade de opções que o aluno escolher, devemos então somar todas as possibilidades pelo Princípio Aditivo para obter o total de maneiras possíveis. Esta soma é igual a:

$$\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}.$$

Podemos simplificar esta soma utilizando o Binômio de Newton (de modo similar ao que foi feito na solução alternativa da questão $\mathbf{4(b)}$, substituindo a=b=1 e n=20) ou padrões reconhecidos no Triângulo de Pascal. Temos então que

$$\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 2^{20}.$$

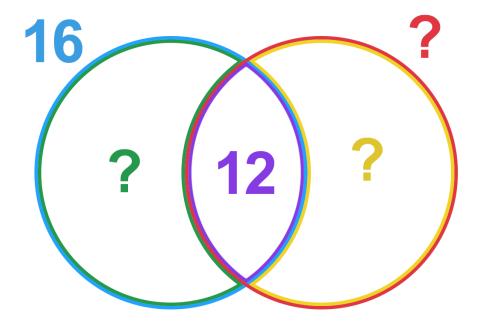
Solução Alternativa para o item (b):

Há 20 opções de comidas à disposição do aluno.

Para cada opção, há duas possibilidades: o aluno escolhe aquela opção, ou não a escolhe.

Como são 20 opções ao total e 2 possibilidades para cada uma delas, então pelo Princípio Multiplicativo, o aluno pode fazer seu prato de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{20}$ formas.

c) Para melhor visualização e análise dos dados, podemos representar as informações por meio de um Diagrama de Venn.





Considere cada conjunto representado no diagrama pelas limitações da borda de sua cor:

Azul: Conjunto de todos os alunos que gostaram da Montanha Radical, independente de terem gostado de ambas as montanhas ou não.

Vermelho: Conjunto de todos os alunos que gostaram da Montanha Super, independente de terem gostado de ambas as montanhas ou não.

Roxo: Conjunto dos alunos que gostaram de ambas as montanhas.

Verde: Conjunto dos alunos que gostaram apenas da Montanha Radical.

Amarelo: Conjunto dos alunos que gostaram apenas da Montanha Super.

Denotaremos por #Cor a quantidade de elementos de cada conjunto, isto é, a quantidade de alunos que corresponde a cada descrição.

Pelo enunciado, temos as informações: #Azul = 16 e #Roxo = 12

Como #Verde = #Azul - #Roxo (pela análise do Diagrama de Venn e das informações), então a quantidade de alunos que gostou apenas da Montanha Radical foi #Verde = 16 - 12 = 4.

Sabendo que o total de alunos é 24, mas que 3 deles não opinaram, então temos 21 alunos que participaram da pesquisa da professora.

Percebendo também que a união do conjunto Verde com o Roxo e o Amarelo resulta no conjunto total, que possui como quantidade o número de alunos que participaram da pesquisa, então:

```
\#\text{Verde} + \#\text{Roxo} + \#\text{Amarelo} = 21
```

- \Rightarrow 4 + 12 + #Amarelo = 21
- \Rightarrow 4 + 12 + #Amarelo = 21 4 12
- \Rightarrow #Amarelo = 5

Assim, 5 alunos gostaram apenas da montanha Super e a questão está resolvida.

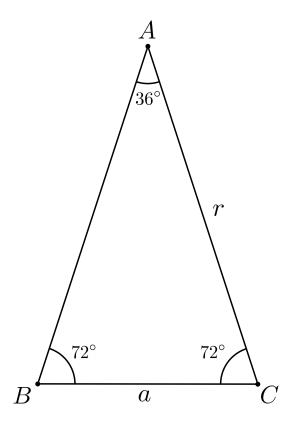
Apenas para complementar a solução e finalizar o Diagrama de Venn:

```
\#Vermelho = \#Roxo + \#Amarelo
```

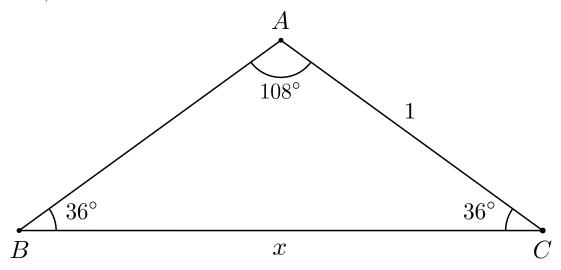
- \Rightarrow #Vermelho = 12 + 5
- \Rightarrow #Vermelho = 17



- 6. Responda os itens a seguir.
 - a) Sendo o lado r = AC do triângulo ABC um valor conhecido, determine a. Note que a expressão que você encontrar para a deve conter r. (dica: divida o ângulo \hat{B} em dois)



b) No triângulo ABC, sabemos que AC=1. Determine x=BC. (dica: divida o ângulo \hat{A} em três)





Solução:

- a) A bissetriz do ângulo \hat{B} intersecta o lado AC em D. Isso nos dá dois triângulos isósceles:
 - O triângulo BCD, pois $\angle BCA = \angle CDB$, então $\overline{BD} = \overline{BC} = a$.
 - O triângulo BAD, pois $\angle DBA = \angle DAB$, então $\overline{DA} = \overline{BD} = a$.

Disso, temos que $\overline{DA} = a$. Consequentemente, $\overline{DC} = r - a$.

Posto isso, note a semelhança de triângulos $\Delta BDC \approx \Delta ABC$. Então:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{a}{r-a}$$

Ou seja, r e a satisfazem a equação

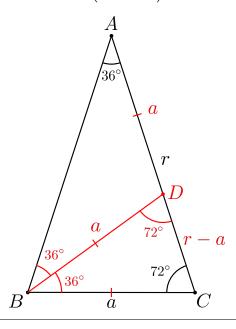
$$a^2 + ar - r^2 = 0$$

Pela fórmula quadrática, há duas soluções para equação acima:

$$a = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)r$$
 ou $a = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)r$

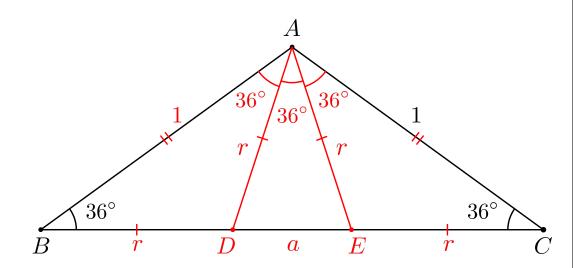
Como a e r são ambos positivos, então

$$a = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)r$$





b) Os segmentos que dividem o ângulo \hat{A} em três intersectam o segmento BC em D e E. Chame $a = \overline{DE}$.



Como o triângulo ABC é isósceles, então BA=1. Temos que os triângulos ABD e ACE são congruentes pela congruência ALA. Além disso, são isósceles. Então

$$\overline{BD} = \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{EC}$$

Chame esse valor comum de r. Temos que

$$x = 2r + a$$

Pelo item anterior, $a=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\!r,$ então,

$$x = \left(2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)r\tag{1}$$

Por outro lado, os triângulos ABC e EAC são semelhantes. Então:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AE}$$
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{r}$$

Ou seja:

$$x = \frac{1}{r} \tag{2}$$



Juntando as equações 1 e 2, obtemos o sistema

$$x = \left(2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)r$$
$$x = \frac{1}{r}$$

Multiplicando as duas equações, obtemos

$$x^{2} = \left[\left(2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) r \right] \frac{1}{r} = 2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, como x é positivo,

$$x = \sqrt{2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Solução Alternativa para o item (b): Note que o triângulo ABC do item (b) é semelhante ao triângulo ABD visto na construção feita na solução do item (a). Tomando a=1 no item (a), temos que o valor que procuramos x é igual a AB=r. Então,

$$1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}x$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}$$

Este resultado coincide com aquele encontrado na primeira solução, visto que

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \sqrt{2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = 1,618\dots$$

A critério de curiosidade: esse valor é denominado de número de ouro, relacionado à proporção áurea e sendo geralmente representado pela letra grega φ . Sua expressão mais conhecida é

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$