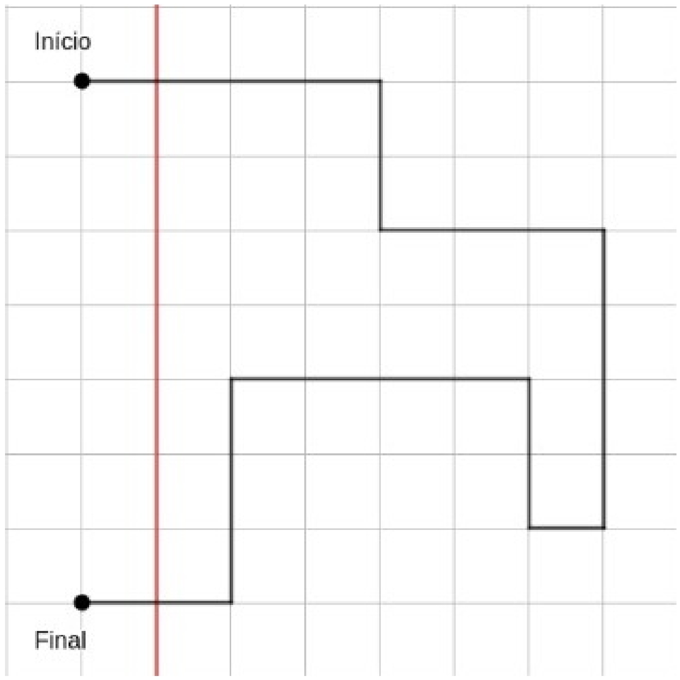
1. Enquanto Julia estudava Matemática, uma formiguinha começou a caminhar pelo seu caderno quadriculado. Entediada com a matéria, a menina traçou o caminho feito pelo inseto.



Sabendo que os quadradinhos do caderno de Julia têm 10 mm de lado, calcule:

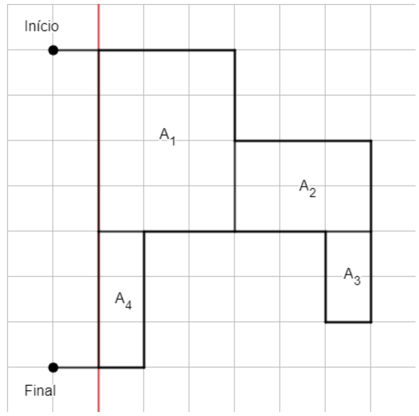
a) A distância, **em metros**, percorrida pela formiguinha do ponto inicial até o ponto final

b) A área, **em centímetros quadrados**, da figura formada entre o caminho feito pela formiga e a linha vermelha do caderno.

Solução:

a) Sabemos que cada um dos lados dos quadradinhos do caderno de Julia possui 10 mm. Para saber a distância percorrida pela formiguinha, precisamos contar a quantidade de lados percorridos por ela do início ao final de seu trajeto. Partindo do início, temos: $4+2+3+4+1+2+4+3+2 = 25$ lados. Multiplicando a quantidade de lados pelo seu tamanho, obtemos $25 \times 10 = 250$ mm. Finalmente, como cada metro possui 1000 mm, a formiguinha percorreu $250 \div 1000 = 0,25$ metros em seu trajeto completo.

b) Para calcular a área dessa figura, iremos dividí-la em pedaços menores como mostrado a seguir.



Podemos calcular a área de cada um dos retângulos menores multiplicando as medidas de seus lados. Temos:

$$A_1 = 30mm \times 40mm = 3cm \times 4cm = 12\ cm^2;$$
$$A_2 = 30mm \times 20mm = 3cm \times 2cm = 6\ cm^2$$
$$A_3 = 10mm \times 20mm = 1cm \times 2cm = 2\ cm^2$$
$$A_4 = 10mm \times 30mm = 1cm \times 3cm = 3\ cm^2$$

Com isso, a área total da figura desejada é $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 12 + 6 + 2 + 3 = 23$ cm^2.

2. Ana está aprendendo sobre potenciação e resolveu entender melhor como se comportam as somas entre as potências de base 2 e base 3. Para isso, ela se desafiou a escrever diversos números naturais como somas de tais potências. Entretanto, há algumas regras: só é possível utilizar uma potência de cada base e os expoentes devem ser todos maiores ou iguais a um. Por exemplo,

   $11 = 2^3 + 3^1$

   $17 = 2^3 + 3^2$

   $73 = 2^6 + 3^2$

   são igualdades válidas, mas

   $10 = 2^0 + 3^2$

   $33 = 2^1 + 2^2 + 3^3$.

   não valem, pois são expressões que utilizam mais de uma potência com a mesma base ou utilizam números menores que um no expoente. Sabendo disso, responda.

   a) Explique por que através destas regras não será possível que Ana encontre somas equivalentes a números pares.

   b) Encontre uma soma equivalente a cada um dos seguintes números: 17, 31, 67 e 145.

   c) Para alguns números, é possível obter uma soma equivalente de **dois modos distintos**. Por exemplo, o 11 é um destes números, pois $11 = 2^1 + 3^2$ e $11 = 2^3 + 3^1$. Encontre **um outro exemplo**, justificando sua resposta.

Solução:

a) Todo número deve ser escrito como a soma de uma potência de base 2 e uma potência de base 3. Além disso, os expoentes devem ser sempre maiores ou iguais a 1. Assim, toda potência de base dois terá como resultado um número par e toda potência de base três terá como resultado um número ímpar. Então, ao somarmos um número par com um número ímpar, o resultado será sempre um número ímpar.

b) $17 = 2^3 + 3^2$;

   $31 = 2^2 + 3^3$;

   $67 = 2^6 + 3^1$;

   $145 = 2^6 + 3^4$.

c) O número 35 é um exemplo (há outros): ele pode ser escrito de dois modos distintos: $35 = 2^5 + 3^1$ e $35 = 2^3 + 3^3$.

3. Patrick, Pedro e Paulo foram passar quatro dias na casa de praia de seu tio, Mário. Como é um homem muito rico, ele autorizou seus sobrinhos a comprarem o que quisessem na cantina em frente à praia. Após seus sobrinhos irem embora, Mário recebeu a conta da lanchonete.

Quanto custou cada um dos alimentos consumidos pelos meninos?

Solução:

Primeiro modo. Comparando as informações de quinta e sexta, concluímos que 3 sucos naturais custam R$4 a mais do que 1 porção de batatas fritas. A partir dessa informação e observando a conta de sábado, vemos que 1 porção de batatas custa R$9,50 e que 3 sucos custam R$13,50. Logo, cada suco custa $13,50 \div 3 = 4,50$. Voltando à quinta-feira, 3 sorvetes custam $18,50 - 9,50 = 9$, logo, cada sorvete custa $9 \div 3 = 3$. Por fim, considerando o domingo, 3 churros custam $31,50 - 13,50 = 18$, logo, cada churro custa $18 \div 3 = 6$.

Portanto, a porção de batata frita custa R$9,50, cada sorvete custa R$3,00, cada suco natural custa R$4,50 e cada churros custa R$6,00.

Segundo modo: Para descobrir os valores dos alimentos, iremos transformar as informações da conta em equações matemáticas. Para isso, utilizaremos as letras B para simbolizar as batatas fritas, S para sorvetes, SN para os sucos naturais e C para os churros.

1. $B + 3S = 18,5$
2. $3SN + 3S = 22,5$
3. $B + 3SN = 23$
4. $3SN + 3C = 31,5$

Somando os expressões 1 e 2, obtemos:

$$(B + 3S) + (B + 3SN) = 18,5 + 23$$
$$2B + 3S + 3SN = 41,5$$

Pela expressão 2, sabemos o valor de 3 sorvetes e 3 sucos naturais. Então, podemos substituir tal valor na expressão encontrada.

$$2B + (3S + 3SN) = 41,5$$
$$2B + 22,5 = 41,5$$
$$2B + 22,5 - 22,5 = 41,5 - 22,5$$
$$2B = 19$$
$$2B \div 2 = 19 \div 2$$
$$B = 9,5$$

Portanto, cada porção de batata frita custa 9,50 reais. Para descobrir os valores do suco natural e do sorvete, iremos substituir o valor da batata frita nas expressões 1 e 3:

$$B + 3S = 18,5$$
$$9,5 + 3S = 18,5$$
$$9,5 + 3S - 9,5 = 18,5 - 9,5$$
$$3S \div 3 = 9 \div 3$$
$$S = 3$$

$$B + 3SN = 23$$
$$9,5 + 3SN = 23$$
$$9,5 + 3SN - 9,5 = 23 - 9,5$$
$$3SN \div 3 = 13,5 \div 3$$
$$SN = 4,5$$

Basta agora utilizar o valor do suco natural na expressão 4 para descobrir o valor do churros.

$$3SN + 3C = 31,5$$

$$3 \times 4,5 + 3C = 31,5$$

$$13,5 + 3C = 31,5$$

$$13,5 + 3C - 13,5 = 31,5 - 13,5$$

$$3C \div 3 = 18 \div 3$$

$$C = 6$$

Assim, descobrimos que a porção de batata frita custa R$9,50, cada sorvete custa R$3,00, cada suco natural custa R$4,50 e cada churros custa R$6,00.

4. Brincando com a multiplicação de números, Pedro inventou um novo conceito matemático: ele chamou de **sensacionais** todos aqueles números que são o produto de dois ou mais números naturais maiores do que 1 e consecutivos. Por exemplo, o 210 é sensacional, pois $210 = 5\times6\times7$. Note que o 2 não é sensacional.

   a) Verifique se cada número abaixo é ou não sensacional, justificando sua resposta.
      - 60.
      - 41.
      - 2023.

   b) Quantos números sensacionais há entre o 100 e o 200?

   c) Pedro chamou de **bisensacional** os números que são sensacionais ao menos de dois modos distintos. Por exemplo, o 120 é bisensacional porque: $120 = 4\times5\times6$ e $120 = 2\times3\times4\times5$. Encontre **um outro** número bisensacional.

Solução:

a)
- 60 é sensacional, pois: $60 = 3 \times 4 \times 5$.
- 41 não é sensacional. De fato, sendo um número primo, só pode ser escrito como 1×41.
- 2023 não é sensacional. Para observar isso, veja que sua forma fatorada é $2023 = 7\times17\times17$. Logo, não pode ser escrito como o produto de números consecutivos.

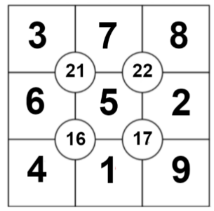
b) Vamos dividir por casos, de acordo com a quantidade de números envolvidos na multiplicação:

- Cinco número ou mais. O menor resultado que podemos obter é: $2\times3\times4\times5\times6 = 720$, que é maior do que 200. Então não temos nenhum número sensacional neste caso.
- Quatro números. O menor resultado possível é: $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. A seguir, temos $3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$. Logo, há apenas um número senscional neste caso.
- Três números. O menor resultado maior do que 100 é $4\times5\times6 = 120$, já contado anteriormente. Depois, temos $5 \times 6 \times 7 = 210$. Logo, não há nenhum novo número sensacional neste caso.
- Dois números. O menor resultado maior do que 100 é $10 \times 11 = 110$; depois temos $11 \times 12 = 132$, $12 \times 13 = 156$, $13 \times 14 = 182$, $14 \times 15 = 210$. Logo, há quatro novos números sencionais para este caso: 110, 132, 156 e 182.

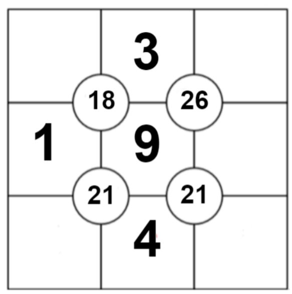
Portanto, há cinco números sensacionais entre 200 e 300: 110, 120, 132, 156 e 182.

c) Há infinitos exemplos. Considerar a forma fatorada dos números pode ajudá-lo. Por exemplo, temos que $8\times9\times10 = 2^3\times3^2\times2\times5 = 2^4\times3^2\times5 = 2\times3\times(2^2)\times5\times(2\times3) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$. Ou seja, $720 = 8 \times 9 \times 10$ e $720 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$. Logo, 720 é um exemplo de número bisensacional.

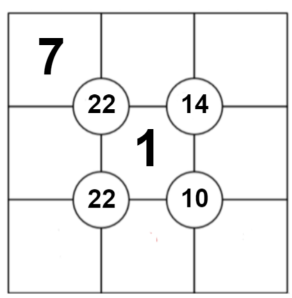
5. Você já deve conhecer o *sudoku*, jogo de uma empresa japonesa e que se tornou muito popular no Brasil a partir de 2005, quando passou a ser publicado pela revista Coquetel. Pouco conhecido dos brasileiros, entretanto, é outro jogo de uma empresa japonesa, a *Kobayaashi Studios*: trata-se do *sujiko*. Veja ao lado a aparência do jogo:



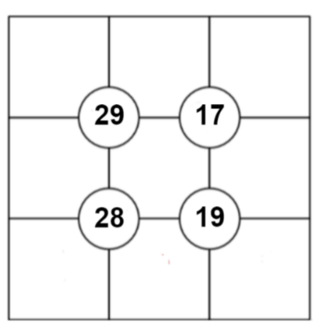
   a) Preencha este *sujiko*:



   b) Agora, preencha este outro *sujiko*:



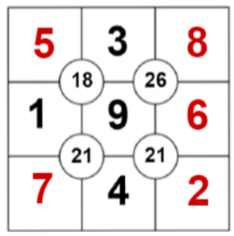
   c) Explique por que **não é possível** preencher o *sujiko* abaixo.



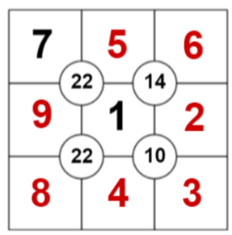
d) Imagine que você quisesse inventar um *sujiko* em que a soma entre os números colocados dentro dos quatro círculos seja a maior possível. Qual deveria ser **o valor dessa soma**?

Solução:

a) O *sujiko* deve ser preenchido do seguinte modo:



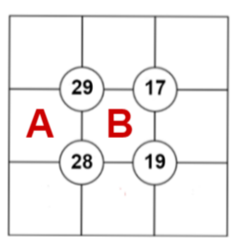
b) O *sujiko* deve ser preenchido do seguinte modo:



c) Vejamos que:

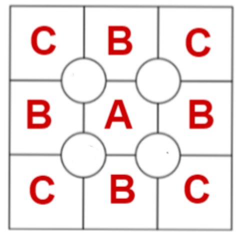
- $29 = 9 + 8 + 7 + 5$ (esta é a única possibilidade de escrever 29 como a soma de quatro números entre 1 e 9);
- $28 = 9+8+6+5$ ou $28 = 9+8+7+4$ (estas são as duas únicas possibilidades).

Note que devem aparecer **exatamente dois** números comuns à soma 29 e à soma 28: os que estão nas posições A e B na imagem abaixo.



Mas, em ambas as possibilidades de soma 28, há *três* números em comum: 9, 8 e 5, no primeiro caso; e 9, 8, e 7, no segundo. Portanto, é impossível preencher este *sujiko*.

d) Note que, ao somarmos os números que estão nos círculos, incluímos nessa soma quatro vezes o número que está na posição A, duas vezes os números que estão nas posições marcadas com letra B, e uma vez os que estão na posição C.



Assim, para tornar esta soma a maior possível, temos de colocar:

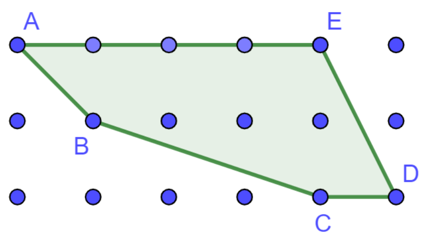
- Na posição A: 9;
- Na posição B: 8, 7, 6 e 5;
- Na posição C: 4, 3, 2 e 1.

Assim, o valor total da soma dos números nos círculo seria: $4 \times 9 + 2 \times 8 + 2 \times 7 + 2 \times 6 + 2 \times 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 98$.

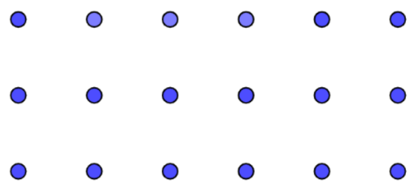
Todavia, precisamos confirmar essa resposta, mostrando que é mesmo possível construir um *sujiko* que atenda a essas condições. Para isso, podemos construir o exemplo abaixo (há outros exemplos possíveis):

6. Os **vértices** de um polígono são os pontos de encontro de dois de seus lados, isto é, são suas "pontas". Por exemplo, os vértices do polígono abaixo (desenhado sobre uma malha pontilhada) estão marcados com as letras A, B, C, D, E.

   Além disso, um polígono é chamado de **equilátero** quando todos os seus lados têm a mesma medida – por exemplo, o quadrado é um polígono equilátero.



   a) Na malha pontilhada abaixo, as distâncias entre dois pontos vizinhos é a mesma, tanto na direção horizontal quanto na vertical:

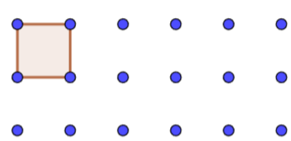


   Quantos polígonos **equiláteros** podemos formar tomando os pontos da malha como **vértices**?

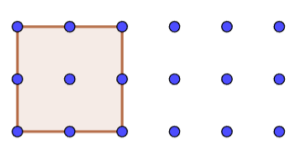
   b) Com uma malha pontilhada 5X50 (isto é, com 5 linhas e 50 colunas), quantos **quadrados** podemos formar tomando os pontos da malha como vértices?

Solução:

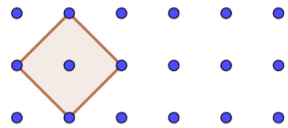
a) Podemos formar as seguintes figuras. 10 quadrados como este:



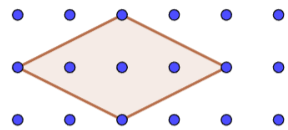
4 quadrados como este:



4 quadrados como este:

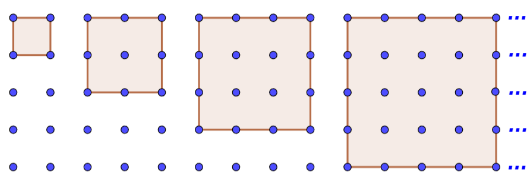


2 figuras como esta:



Portanto, ao todo podemos formar $10 + 4 + 4 + 2 = 20$ quadriláteros.

b) Consideremos primeiramente o caso de quadrados retos, como os da figura abaixo (que representa apenas um trecho da malha pontilhada completa):

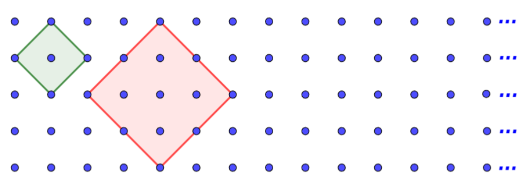


Aqui temos:

- Quadrados 1X1: $4 \times 49 = 196$;
- Quadrados 2X2: $3 \times 48 = 144$;
- Quadrados 3X3: $2 \times 47 = 94$;
- Quadrados 4X4: $1 \times 46 = 46$;

Então, ao todo há para este **caso I**: $196 + 144 + 94 + 46 = 480$ quadrados.

Consideremos agora os quadrados inclinados, como abaixo:



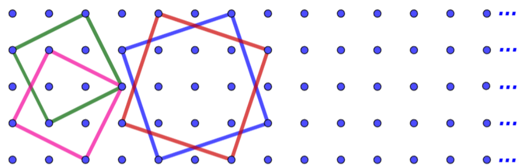
Aqui temos:

- Quadrados do tipo verde: $3 \times 48 = 144$;

- Quadrados do tipo vermelho: 46.

Então, ao todo há para **caso II**: $144 + 46 = 190$ quadrados.

Consideremos agora os quadrados como os abaixo:



Aqui temos:

- Quadrados do tipo verde: $2 \times 47 = 94$;
- Quadrados do tipo rosa: $2 \times 47 = 94$;
- Quadrados do tipo azul: 46;
- Quadrados do tipo vermelho: 46.

Então, ao todo há para este **caso III**: $94 + 94 + 46 + 46 = 280$ quadrados.

Portanto, a quantidade total de quadrados é: $480 + 190 + 280 = 950$.