1. Sejam a e b números reais quaisquer. Faça o que se pede em cada item:

   a) Mostre que $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

   b) Prove que a e b são as raízes da equação: $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.

   c) Encontre as soluções reais da equação: $\sqrt[3]{2019 - x} + \sqrt[3]{x - 1263} = 12$.

Solução:

a) Temos que

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\
\text{prop distributiva} \rightsquigarrow &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\
\text{colocando } 3ab \text{ em evidência} \rightsquigarrow &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)
\end{aligned}$$

como queríamos provar.

b) **Solução 1:** Substituindo x por a em $x^2 - (a+b)x + ab$, temos:

$$a^2 - (a+b)a + ab = \cancel{a^2} - \cancel{a^2} - \cancel{ba} + \cancel{ab} = 0,$$

logo a é raiz da equação $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.

Analogamente, substituindo x por b temos:

$$b^2 - (a+b)b + ab = \cancel{b^2} - \cancel{ab} - \cancel{b^2} + \cancel{ab} = 0,$$

logo b também é raiz da equação.

Solução 2: Como $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ é uma equação de segundo grau podemos usar a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes. Assim

$$\begin{aligned}
x_1, x_2 &= \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} \\
&= \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2) - 4ab}}{2} \\
&= \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)}}{2} \\
&= \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2} \\
&= \frac{(a+b) \pm |a-b|}{2}.
\end{aligned}$$

Agora devemos considerar os seguintes casos:

- Se $a \geq b$, então $a - b \geq 0$ e logo $|a - b| = a - b$. Segue que, neste caso, as raízes são
$$x_1 = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = a \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = b.$$
- Se $a < b$, então $a - b < 0$ e logo $|a - b| = -a + b$. Segue que, neste caso, as raízes são
$$x_1 = \frac{(a+b)+(-a+b)}{2} = b \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{(a+b)-(-a+b)}{2} = a.$$

Portanto, qualquer que seja o caso a e b são as raízes de $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.

c) Denote por $a = \sqrt[3]{2019 - x}$ e $b = \sqrt[3]{x - 1263}$. Temos então que: $a + b = 12$ e ainda

$$a^3 + b^3 = (2019 - \cancel{x}) + (\cancel{x} - 1263) = 756$$

O que nos leva ao sistema:

$$\begin{cases} a + b & = 12 \\ a^3 + b^3 & = 756 \end{cases}$$

Segue do item *a*) que:
$$(\underbrace{a+b}_{12})^3 = \underbrace{a^3+b^3}_{756} + 3ab(\underbrace{a+b}_{12})$$

$$\Rightarrow 12^3 = 756 + 3ab(12)$$
$$\Rightarrow 1728 - 756 = 36ab$$
$$\Rightarrow 27 = ab$$

Como $a + b = 12$ e $ab = 27$, segue do item *b*) que a e b são as raízes da equação $y^2 - 12y + 27 = 0$. Resolvendo a equação, obtemos que $a = 9$ e $b = 3$, ou $a = 3$ e $b = 9$. Logo,

- se $a = 9$, temos:

$$\sqrt[3]{2019 - x} = 9 \Rightarrow 2019 - x = 9^3 \Rightarrow x = 1290$$

- se $a = 3$, temos:

$$\sqrt[3]{2019 - x} = 3 \Rightarrow 2019 - x = 3^3 \Rightarrow x = 1992$$

Assim, as soluções reais da equação são $x = 1290$ e $x = 1992$.

2. Um número é dito *samurai* se puder ser escrito na forma

$$2\underbrace{00\ldots00}_{n\text{-zeros}}19$$

onde n é um inteiro e $n \geq 2$. Por exemplo, 20019 e 2000019 são números samurais, mas 2019 não é.

a) Mostre que existem dois números samurais cuja diferença entre eles é múltiplo de 2019.

b) Mostre que existem infinitos números samurais que são múltiplos de 2019.

Solução:

a) Considere os primeiros 2020 números samurais: $20019, 200019, \cdots, 200\cdots019$.

O Princípio da Casa dos Pombos garante que dois deles, digamos a e b, terão o mesmo resto r na divisão por 2019. Então:

$$\begin{aligned} a &= 2019k + r,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ b &= 2019l + r,\ \ l \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow a - b &= 2019(k - l) \end{aligned}$$

Logo, a diferença $a - b$ é múltiplo de 2019.

b) Seja n o número de zeros em $200\cdots019$. Então:

$$200\cdots019 = 200\cdots000 + 19 = 2\cdot 10^{n+2} + 19$$

Basta encontrarmos infinitos valores de $n > 1$ para os quais $2 \cdot 10^{n+2} + 19 \equiv 0 \pmod{2019}$. Mas:

$$\begin{aligned} 2\cdot 10^{n+2} + 19 &\equiv 0 \pmod{2019} \\ \Leftrightarrow 2\cdot 10^{n+2} + 19 &\equiv 2019 \pmod{2019} \\ \Leftrightarrow 2\cdot 10^{n+2} &\equiv 2000 \pmod{2019} \\ \Leftrightarrow 10^{n+2} &\equiv 10^3 \pmod{2019} \end{aligned}$$

Como $n + 2 > 3$, o problema equivale a encontrar infinitos n's tais que

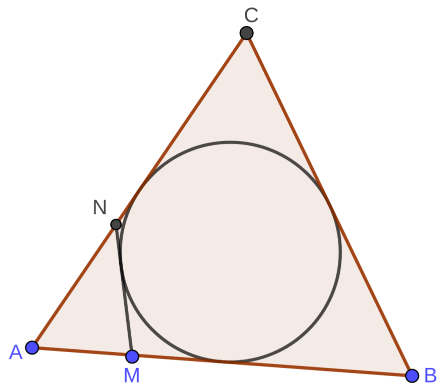
$$10^{n-1} \equiv 1 \pmod{2019}$$

Como $\mathrm{mdc}(10, 2019) = 1$, então pelo Teorema de Euler-Fermat, existe um expoente $\varphi(2019)$ tal que:

$$\begin{aligned} 10^{\varphi(2019)} &\equiv 1 \pmod{2019} \\ \Rightarrow 10^{\varphi(2019)k} &\equiv 1 \pmod{2019},\ \ k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Assim: $n-1=\varphi(2019)k \Rightarrow n=\varphi(2019)k+1,\ k\in\mathbb{N}^*$. Logo, existem infinitos números samurais (com $n=\varphi(2019)k+1$ zeros) que são múltiplos de 2019.

3. Seja ΔABC um triângulo equilátero e sejam M e N pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ é tangente à circunferência inscrita de ΔABC.

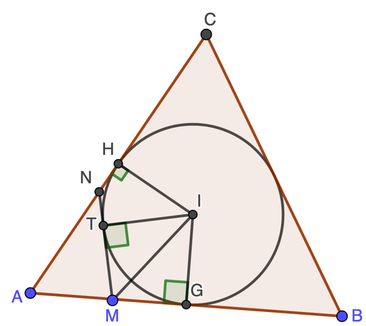


a) Mostre que o perímetro do triângulo ΔAMN é igual ao lado do triângulo ΔABC.

b) Prove que $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = 1$.

Solução:

a) Sejam ℓ o lado do triângulo equilátero ΔABC, I seu incentro, T o ponto de tangencia de $\overline{MN}$ com a circunferência inscrita, G o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e H o ponto médio do segmento $\overline{AC}$.



Como o triângulo é equilátero, a bissetriz, a mediana, a mediatriz e a altura relativas a um mesmo vértice são coincidentes o que implica que o ângulo $\angle IGM = 90°$. Assim tanto T quanto G são pontos de tangência por M à circunferência inscrita. Pela propriedade de potência de um ponto segue que $\overline{MT} = \overline{MG}$.

Logo

$$\frac{\ell}{2} = \overline{AG} = \overline{AM} + \overline{MG} = \overline{AM} + \overline{MT}. \tag{1}$$

Analogamente temos que $\angle IHN = 90°$, assim tanto T quanto H são pontos de tangência por N à circunferência inscrita. Pela propriedade de potência de um ponto segue que $\overline{NT} = \overline{NH}$, o que implica que

$$\frac{\ell}{2} = \overline{AH} = \overline{AN} + \overline{NH} = \overline{AN} + \overline{NT}. \tag{2}$$

Assim, segue de (1) e (2), que o perímetro do triângulo ΔAMN é

$$\overline{AM} + \overline{MN} + \overline{AN} = \left(\overline{AM} + \overline{MT}\right) + \left(\overline{AN} + \overline{NT}\right) = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} = \ell.$$

$b)$ Segue do item anterior que $\cancel{\overline{AM}} + \overline{MN} + \overline{AN} = \overline{AB} = \cancel{\overline{AM}} + \overline{MB}$ de onde temos que $\overline{MB} = \overline{MN} + \overline{AN}$ e da mesma forma vemos que $\overline{NC} = \overline{MN} + \overline{AM}$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} &= \frac{\overline{AM}}{\overline{MN} + \overline{AN}} + \frac{\overline{AN}}{\overline{MN} + \overline{AM}} \\ &= \frac{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{MN}(\overline{AN} + \overline{AM})}{\overline{MN}^2 + \overline{MN}(\overline{AN} + \overline{AM}) + \overline{AM} \cdot \overline{AN}} \end{aligned} \tag{3}$$

Por outro lado, segue diretamente da Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo ΔAMN em relação ao ângulo $\angle MAN$ que:

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2\overline{AM} \cdot \overline{AN}\cos(\angle MAN) \\ &= \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2\overline{AM} \cdot \overline{AN}\cos(60°) \\ &= \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - \overline{AM} \cdot \overline{AN} \end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3) temos que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} &= \frac{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{MN}(\overline{AN} + \overline{AM})}{\left(\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 \cancel{- \overline{AM} \cdot \overline{AN}}\right) + \overline{MN}(\overline{AN} + \overline{AM}) + \cancel{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}} \\ &= \frac{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{MN}(\overline{AN} + \overline{AM})}{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{MN}(\overline{AN} + \overline{AM})} = 1\end{aligned}$$

como queríamos provar.

4. Num planeta distante habitam seres peculiares. Eles se diferenciam somente pela cor de seus corpos que pode ser: Amarela, Verde ou Roxa. Alguns fatos genéticos interessantes desses seres são os seguintes:

   - só nascerá um novo ser do encontro de dois seres de cores diferentes;
   - nesses encontros os seres se fundem para formar um novo ser;
   - o novo ser nunca terá a mesma cor que os pais. Assim temos as seguintes possibilidades:
     - um ser Amarelo e um ser Verde se fundem para formar um novo ser Roxo;
     - um ser Verde e um ser Roxo se fundem para formar um novo ser Amarelo;
     - um ser Roxo e um ser Amarelo se fundem para formar um novo ser Verde;

   Supondo que habitam este planeta 10 seres Roxos, 51 Amarelos e 23 Verdes, determine:

   a) Qual será a espécie sobrevivente quando cruzamentos não forem mais possíveis?

   b) Quantos nascimentos de seres Roxos acontecerão?

   c) Existe a possibilidade de que não ocorram nascimentos de seres Amarelos? E Verdes? Caso seja possível, determine quantos sobreviventes haverá em cada caso.

Solução:

Vamos representar por (R, A, V) a situação que retrata R seres Roxos, A seres Amarelos e V seres Verdes. Devemos considerar os três possíveis encontros:

(I) Um ser Amarelo cruza-se com um ser Verde: $(R, A, V) \to (R+1, A-1, V-1)$

(II) Um ser Verde cruza-se com um ser Roxo: $(R, A, V) \to (R-1, A+1, V-1)$

(III) Um ser Roxo cruza-se com um ser Amarelo: $(R, A, V) \to (R-1, A-1, V+1)$

a) Podemos falar de sobreviventes quando restar somente seres com a mesma cor. Assim queremos determinar se a situação final será da forma $(S, 0, 0)$ ou $(0, S, 0)$ ou $(0, 0, S)$, onde $S > 0$ é o número de sobreviventes.

Um número inteiro n é par se $n \equiv 0 \mod 2$, vamos denotar um número par por $\overline{0}$. Da mesma forma um número inteiro n é ímpar se $n \equiv 1 \mod 2$, denotaremos tais números por $\overline{1}$. Como o número inicial de seres Roxos é par e os números de seres Amarelos e Verdes são ímpares, podemos retratar a paridade da situação inicial por $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})$. Em seguida pode acontecer um cruzamento do tipo (I), (II), ou (III), assim o número de seres e a respectiva paridade serão:

(I) $(R+1, A-1, V-1) \rightsquigarrow (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$

(II) $(R-1, A+1, V-1) \rightsquigarrow (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$

(III)$(R-1, A-1, V+1) \rightsquigarrow (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$

Independente do tipo de cruzamento que aconteça, a paridade do número de seres após o primeiro cruzamento será $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$. Repetindo o raciocínio para o segundo cruzamento vemos que, seja qual for o tipo (I),(II) ou (III), a paridade do número de seres será $(\overline{0},\overline{1},\overline{1})$ que coincide com a paridade da situação inicial.

Assim vemos que a cada estágio de cruzamentos só poderemos ter as situações: $(\overline{0},\overline{1},\overline{1})$ ou $(\overline{1},\overline{0},\overline{0})$. Logo as situações finais $(0,S,0)$ e $(0,0,S)$, (onde S é o número de sobreviventes) são impossíveis pois têm paridade $\left(\overline{0},\overline{S},\overline{0}\right)$ e $\left(\overline{0},\overline{0},\overline{S}\right)$, respectivamente, onde $\overline{S}$ será $\overline{0}$ ou $\overline{1}$ conforme o número de sobreviventes S seja par ou ímpar. Disto concluímos que a espécie sobrevivente será a de seres Roxos.

b) A partir da situação inicial $(10,51,23)$, suponhamos que ocorram x cruzamentos do tipo (I), y cruzamentos do tipo (II) e z cruzamentos do tipo (III). A situação dos sobreviventes será retratada pelo terno $(10+x-y-z; 51-x+y-z; 23-x-y+z)$. Como não devem restar seres Amarelos nem Verdes, temos:

$$51-x+y-z=0$$
$$23-x-y+z=0$$

de onde $74-2x=0$ e logo $x=37$, ou seja ocorrem 37 cruzamentos de seres Amarelos com seres Verdes e logo ocorrerão 37 nascimentos de seres Roxos.

c) Seja M o número de sobreviventes, logo $10+x-y-z=M$. Se não houvesse nascimentos de seres Amarelos isso significa que teríamos 0 cruzamentos entre seres Roxos e Verdes, ou seja $y=0$ e como $x=37$ segue que

$$51-37-z=0$$
$$23-37+z=0$$
$$10+37-z=M$$

$$14=z$$
$$47-14=M$$

Logo SIM, é possível não ter nascimentos de seres amarelos e neste caso o número de sobreviventes será $M=33$ seres Roxos. Uma possível tal situação seria: inicialmente temos $(10,51,23)$; se tivermos 10 cruzamentos Roxo-Amarelo então $(0,41,33)$; após 33 cruzamentos Amarelo-Verde $(33,8,0)$; 4 cruzamentos Roxo-Amarelo $(29,4,4)$; mais 4 cruzamentos Amarelo-Verde $(33,0,0)$. No total ocorreram 37 cruzamentos Amarelo-Verde (isto é 37 nascimentos de seres Roxos), 14 cruzamentos Roxo-Amarelo (14 nascimentos de seres verdes) e 0 cruzamentos Roxo-Verde (ou seja 0 nascimentos de seres Amarelos).

Já para o caso de não ocorrer nascimentos de seres Verdes, teríamos $z=0$ logo o sistema ficaria

$$\begin{aligned} 51 - 37 + y &= 0 \\ 23 - 37 - y &= 0 \\ 10 + 37 - y &= M \end{aligned}$$

de onde segue que $y = -14 < 0$ o que é impossível. Logo NÃO é possível não ter nascimento de seres Verdes.