1. Polígonos planares são regiões do plano delimitadas por uma linha fechada formada por um número finito de pontos e segmentos de retas entre estes pontos. Os pontos são chamados vértices e os segmentos chamados lados do polígono. Um polígono é dito convexo quando contém todos os segmentos com extremos no próprio polígono. Por exemplo, triângulos são polígonos de três lados, quadriláteros de quatro, pentágonos de cinco, etc. Os ângulos internos são os ângulos em cada vértice formado pelos dois segmentos saindo deste vértice e apontando para dentro da região.

   a) Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?

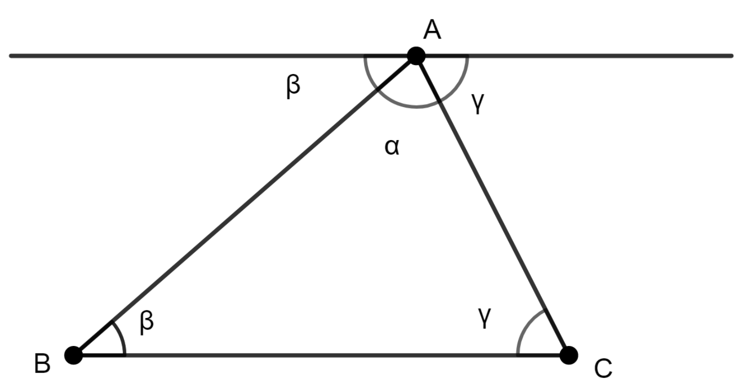
   b) Verifique (com desenhos) que quadriláteros convexos, pentágonos convexos e hexágonos convexos podem ser decompostos em triângulos, formados pelos vértices, que não se intersectam dois a dois. Em quantos triângulos podemos decompor um polígono convexo de n lados?

   c) Qual é a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados?

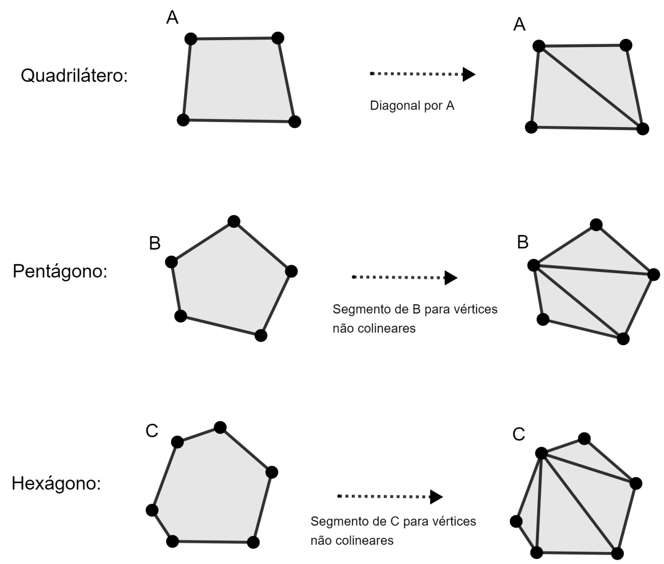
   d) Num polígono convexo a soma de quaisquer dois ângulos internos consecutivos é menor que 350°. Qual é o maior número possível de lados desse polígono?

Solução:

a) Resposta: 180°. Basta traçar uma reta paralela a um dos lados passado pelo vértice oposto.



b) Fixamos um vértice do polígono e por ele traçamos segmentos para todos os outros vértices não colineares. Dessa forma o polígono fica decomposto em triângulos. A figura abaixo mostra como fazer isso para os casos solicitados.



Como temos $n-1$ vértices diferentes do ponto fixado essa decomposição usa $(n-1)-1 = n-2$ triângulos.

c) Como podemos decompor o polígono em $n-2$ triângulos e a soma dos ângulos internos do polígono é igual a soma dos ângulos internos destes triângulos temos um total de $(n-2)\cdot 180°$.

d) Sejam $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ os n ângulos internos do polígono ordenados consecutivamente. Pelo enunciado temos

$$\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 < 350° \\ \alpha_2 + \alpha_3 < 350° \\ \cdots \\ \alpha_n + \alpha_1 < 350°\end{gathered}$$

Somando estas n inequações obtemos

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) < n \cdot 350°.$$

Usando a forma obtida para a soma dos ângulos interno temos:

$$2(n-2)180° < n \cdot 350°,$$

ou seja,

$$360n - 720 < 350n \Rightarrow 10n < 720$$

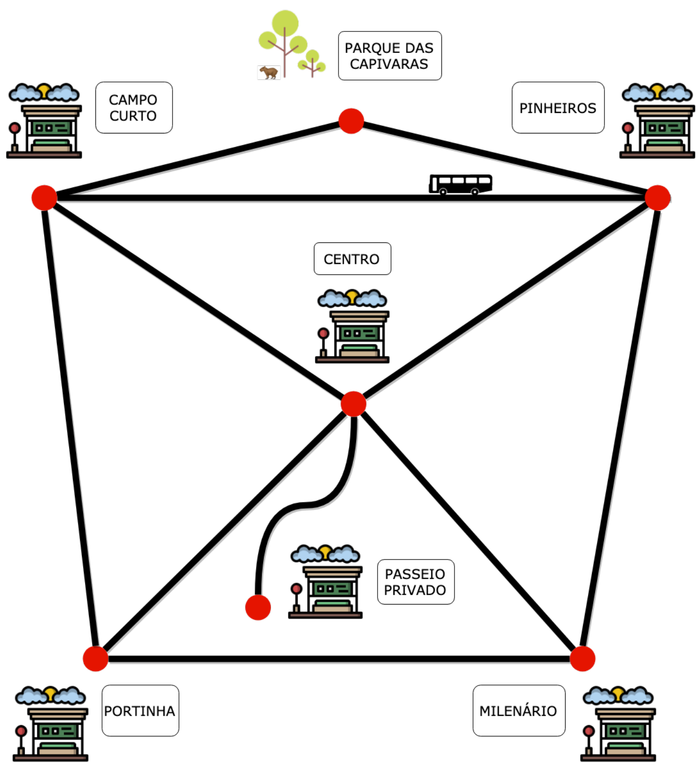
e, portanto,

$$n < 72.$$

Como n é um número inteiro, temos que $n \leq 71$.

É fácil checar que o polígono regular de 71 lados satisfaz o enunciado do problema. Portanto o maior número de lados possível é 71.

2. Thais gosta de andar de ônibus em sua cidade, Marindrina. A rede de transporte público é composta por 7 terminais (Campo Curto, Portinha, Milenário, Pinheiros, Centro, Passeio Privado e Parque das Capivaras), e as linhas de ônibus que as ligam são mostradas abaixo:



Todas as linhas de ônibus da cidade funcionam nos dois sentidos, e se restringem aos terminais adjacentes. Por exemplo, é possível fazer a rota Campo Curto – Parque das Capivaras ou Parque das Capivaras – Campo Curto. Porém, **o número de viagens é contado individualmente**, isto é, no exemplo anterior seriam contabilizadas 2 viagens diferentes. Cada linha ligando os terminais corresponde à uma única linha de ônibus que começa em um nó (terminal) e termina no seguinte. Sabendo disso:

a) De quantas maneiras distintas Thais pode ir de Campo Curto até Milenário, evitando passar pelo centro? Considere que Thais **não pode repetir nem terminais, nem**

linhas de ônibus.

b) E obrigatoriamente passando pelo centro?

c) Desta vez, Thais decidiu que irá tentar passear por todas as linhas de ônibus de Marindrina exatamente uma única vez, **podendo repetir terminais para tal**. Explique por que é impossível encontrar tal trajeto, independentemente de onde seja o ponto inicial.

d) Analogamente, argumente porque o dito no item anterior é possível caso Thais escolha não passar pelo Passeio Privado. Conclua apresentando uma rota que satisfaça tal condição.

Solução:

a) Observe que para Thais chegar em Milenário, ela deve necessariamente passar ou por Pinheiros, ou por Portinha (já que está exclusa a opção de vir pelo centro).

Se Thais chega por Pinheiros existem duas opções:

- Campo Curto $\longrightarrow$ Parque das Capivaras $\longrightarrow$ Pinheiros;
- Campo Curto $\longrightarrow$ Pinheiros.

Se Thais chega por Portinha existe uma única opção:

- Campo Curto $\longrightarrow$ Portinha.

Logo, ao todo existem apenas 3 opções de itinerário.

b) Podemos seguir o mesmo raciocínio retroativo do item anterior, agora incluindo o Centro.

Se Thais chega por Pinheiros existem 4 opções:

- as duas opções do item anterior;
- passando pelo Centro: como Thais não pode ter passado por Milenário ainda e tampouco pelo Passeio Privado (já que só pode andar uma vez em cada linha), ela pode tomar as rotas:
  - Campo Curto $\longrightarrow$ Centro;
  - Campo Curto $\longrightarrow$ Portinha $\longrightarrow$ Centro.

Se Thais chega por Portinha existem 4 opções:

- a opção do item anterior;
- passando pelo Centro: pelo mesmo motivo do item anterior, Thais não pode chegar por Milenário ou Passeio Privado. Assim, são opções:
  - Campo Curto $\longrightarrow$ Centro;
  - passando por Pinheiros: as duas opções listadas em (a),
    - $*$ Campo Curto $\longrightarrow$ Pinheiros $\longrightarrow$ Centro;

$*$ Campo Curto $\longrightarrow$ Parque das Capivaras $\longrightarrow$ Pinheiros $\longrightarrow$ Centro.

Se Thais chega pelo Centro existem quatro opções:

- Campo Curto $\longrightarrow$ Centro;
- as três opções do item (a), escolhendo ir para o Centro ao invés de Milenário.

Ao todo temos, portanto, 12 opções de itinerário, dos quais 9 passam obrigatoriamente pelo centro.

c) Suponha que seja possível encontrar tal trajeto. Observe que Passeio Privado é um ponto isolado. Isto implica que ele deve ser ou o início, ou o final do percurso, pois caso contrário seria necessário ir e voltar pela mesma rota. Por simplicidade, suponha que seja ponto inicial, uma vez que as rotas serão as mesmas em ambos os casos (apenas com a ordem invertida). Note que existem 3 rotas que passam por Portinha. Como não estamos começando dentro de Portinha, as 3 rotas devem ser uma chegada, uma partida, e outra chegada. Já que não é possível deixar o terminal, este deve ser o ponto final. Mas o mesmo argumento pode ser usado para Milenário, o que implica que a nossa rota deve ter dois finais; o que é impossível. Assim, tal rota não existe.

d) Utilizando o raciocínio do item anterior, devemos escolher começar por Portinha e terminar em Milenário (ou vice e versa). Assim, uma possível solução é a ordem: Portinha, Centro, Milenário, Portinha, Campo Curto, Parque das Capivaras, Pinheiros, Campo Curto, Centro, Pinheiros, Milenário.

3. Os triângulos são considerados estruturas geometricamente muito estáveis, pois conseguem manter sua forma mesmo com a aplicação de esforços no seu plano, como mostrado na Figura 1.

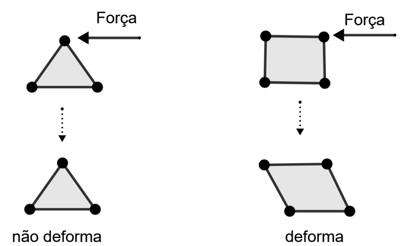


Figura 1: estabilidade de triângulos

Ao agrupar vários triângulos, formamos o que chamamos de treliça (veja a figura 2). Essa estrutura é muito utilizada em telhados de casas.

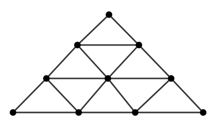


Figura 2: treliça

Na "Vizinhança Triangular" (veja a figura 3), o telhado de toda casa é feito usando uma treliça, que é construída utilizando-se toras de madeira. Considere que os dois segmentos verticais que formam as paredes não contam como toras. Assim, na casa 1 mora uma pessoa e o telhado utiliza 3 toras, na casa 2 moram duas pessoas e foram necessárias 9 toras para a construção do telhado, e assim sucessivamente, seguindo o padrão abaixo (figura 3):

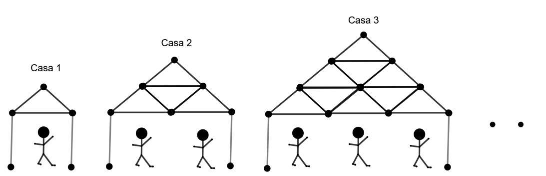


Figura 3: Vizinhança Triangular

Os moradores constroem as casas em ordem crescente (1, 2, 3, ...). Sabendo disso:

a) Quantas toras devem ser compradas para construir o telhado somente da Casa 4?

b) Dê a fórmula geral para quantas toras são necessárias para a construção do telhado somente da casa n.

c) Atualmente na vila moram 276 pessoas. Qual foi a última casa construída?

Solução:

a) Seguindo o padrão das casas anteriores, temos: $18 + 4 \cdot 3 = 30$.

b) Para encontrar o termo geral, devemos entender o padrão de construção das casas.

- Para a casa 1, temos 1 triângulo;
- Para a casa 2, temos a casa 1 mais dois triângulos, isto é, (1 + 2) triângulos;
- Para a casa 3, temos a casa 2 mais três triângulos, isto é, (1 + 2 + 3) triângulos;
- Para a casa n, temos a casa (n-1) mais n triângulos, isto é, (1 + 2 + ... + n) triângulos.

Como cada triângulo utiliza 3 toras, podemos inferir que a quantidade de toras para a casa n é de: 3(1 + 2 + ... + n). Como a soma dos n primeiros números naturais é $n(n+1)/2$, temos que:

$$\text{quantidade necessária para a casa n: } \frac{3n(n+1)}{2}$$

Observação: Note que aqui não é necessário conhecer de antemão a soma dos n primeiros números naturais. Uma maneira elegante e rápida de perceber a fórmula é alinhando os números de 1 até n em ordem crescente e decrescente, formando-se duas linhas:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

Somando estes números em colunas e então somando as somas, é possível notar que $2 \cdot (1+2+\cdots+n) = (n+1) \cdot n$*, de onde decorre a fórmula. Esta estratégia se chama soma de Gauss. Raciocínios análogos são possíveis somando-se o primeiro com o último termo, o segundo com o penúltimo, e assim sucessivamente.*

c) Seja a última casa chamada de n. Como o número total de pessoas na vila é dado pela soma de todos os moradores, isto é, a soma dos n primeiros números naturais, temos que:

$$276 = \frac{n(n+1)}{2}$$

de onde decorre que $n = 23$, ou seja, a última casa construída é a de número 23.

4. Neste exercício provaremos que os fatores primos de números da forma a^2+1 podem ser escritos como soma de dois quadrados perfeitos. Para dois números inteiros m e n, escrevemos $m|n$ se n é um múltiplo de m.

a) Seja r um inteiro positivo. Quantos pares de inteiros (m, n) satisfazem $0 \leq m \leq r$ e $0 \leq n \leq r$? (Deixe sua resposta em termos de r).

b) Sejam p um número primo e r o maior inteiro menor que $\sqrt{p}$. Dado um número a que **NÃO** múltiplo de p, prove que existem dois pares distintos (m_1, n_1) e (m_2, n_2), com $0 \leq m_1, n_1, m_2, n_2 \leq r$, tais que

$$m_1 + an_1 \quad \text{e} \quad m_2 + an_2$$

deixam o mesmo resto quando divididos por p.

c) Conclua que existem u e v inteiros (possivelmente negativos) tais que $p|(u + av)$ e $0 < u^2 < p$ e $0 < v^2 < p$ (*Lema de Thue*).

d) Se $p|(a^2 + 1)$, prove que $p = u^2 + v^2$. (Dica: $u^2 + v^2 = (a^2 + 1)v^2 + u^2 - a^2v^2$.)

Solução:

a) Entre 0 e r temos $r + 1$ números inteiros: $0, 1, 2, ..., r$. Como m e n são quaisquer neste intervalo, o princípio multiplicativo nos garante $(r+1) \cdot (r+1) = (r+1)^2$ pares.

b) Pelo item anterior temos $(r + 1)^2$ pares de inteiros (m, n) com m e n entre 0 e r. Isso nos permite formar $(r+1)^2$ números da forma $m+an$ e portanto $(r+1)^2$ restos por p. Pela escolha de r, temos que $r + 1 > \sqrt{p}$, ou seja, $(r + 1)^2 > p$. Como só existem p restos possíveis na divisão por p (a saber $0, 1, ..., p - 1$), para dois destes pares devemos obter o mesmo resto por p (pelo princípio da casa dos pombos).

c) Sejam (m_1, n_1) e (m_2, n_2) dois pares como acima tais que $(m_1 + an_1)$ e $(m_2 + an_2)$ deixam o mesmo resto por p. Então a diferença

$$(m_1 + an_1) - (m_2 + an_2) = (m_1 - m_2) + a(n_1 - n_2)$$

é múltiplo de p. Assim tomamos $u = m_1 - m_2$ e $v = n_1 - n_2$. Também, como os pares são distintos, temos que u e v não são ambos nulos.

Note que $-r \leq -m_2 \leq u \leq m_1 \leq r$. Daí $u^2 \leq r^2 < p$. De maneira análoga conclui-se que $v^2 < p$.

Finalmente, se fosse $u = 0$, teríamos $p|u + av = av$. Como p não é fator de a, deveríamos ter $p|v$, donde $v = 0$ (v^2 seria múltiplo de p menor que p). Como u e v não podem ser ambos nulos temos uma contradição. Analogamente, chegamos a um absurdo se supormos $v = 0$. Logo $u^2 > 0$ e $v^2 > 0$.

d) Sejam u e v satisfazendo o enuciado do item (c). Como $u^2 + v^2 = (a^2 + 1)v^2 + u^2 - a^2v^2 = (a^2 + 1)v^2 + (u - av)(u + av)$, teremos que $u^2 + v^2$ é soma de dois múltiplos de p. Assim $u^2 + v^2$ é um múltiplo positivo de p e

$$0 < u^2 + v^2 < p + p = 2p.$$

Como p é o único múltiplo de p entre 0 e $2p$ concluímos que $u^2 + v^2 = p$.

BOA PROVA!