OPRM 2019
2a Fase
Nível 1
21/09/19
Duração: 3:30

1. Bernardo tem um jogo de celular que consiste em capturar *esferas mágicas* identificadas com os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Cada vez que uma esfera mágica é capturada ela é colocada em um compartimento identificado no seu celular que marca a ordem que ele capturou.

   No primeiro dia que ele baixou o jogo ele capturou as esferas mágicas de números 1, 4 e 3, nesta ordem. E elas foram colocadas no compartimento **A**. No segundo dia ele capturou as esferas mágicas de números 5, 7, 6 e 2, nesta ordem. Essas foram colocadas no compartimento **B**. A situação é mostrada na Figura 1 abaixo:

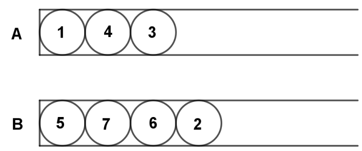


Figura 1: Compartimentos de Bernardo

   Depois de capturadas todas as 7 esferas, para ganhar o jogo, Bernardo deve colocá-las em **ordem crescente, da esquerda para a direita** no compartimento **A**.

   O jogo deixa movimentar quantas esferas Bernardo quiser de um compartimento para o outro, tirando as esferas do lado direito de cada compartimento. Porém a ordem das esferas que ele tira de um compartimento para colocar em outro **sempre vai ficar igual**.

   Por exemplo, se ele quiser tirar as esferas 6 e 2 do compartimento **B** e colocá-las no compartimento **A**, a ordem, da esquerda para a direita no compartimento **A** irá ficar 1, 4, 3, 6 e 2, e no compartimento **B** irá ficar 5 e 7, conforme mostra a Figura 2 abaixo.

   Outro exemplo, depois que Bernardo fez a movimentação acima, ele pode movimentar as esferas 4, 3, 6 e 2 do compartimento **A** para o compartimento **B**. Depois dessa movimentação as esferas no compartimento **B** terão a seguinte ordem, da esquerda para a direita, 5, 7, 4, 3, 6 e 2. Já o compartimento **A** terá apenas a esfera de número 1. Veja a Figura 2 abaixo:

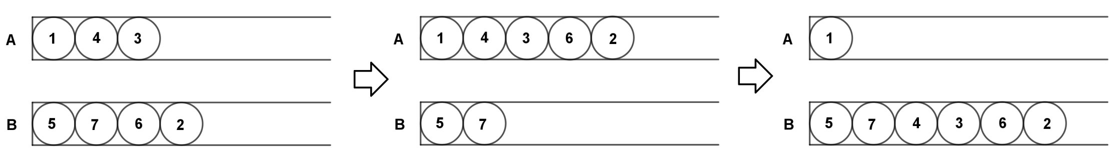


Figura 2: Exemplo de movimentações

   a) Partindo da **Figura 1**, indique uma sequência de movimentações que Bernardo precisa fazer, entre os seus compartimentos **A** e **B**, para deixar no compartimento **A** apenas as esferas 1, 2, 3 e 4, nesta ordem da esquerda para a direita.

   b) Indique uma sequência de movimentações que Bernardo precisa fazer, entre os seus compartimentos **A** e **B**, para ganhar o jogo.

   c) Bruna, a amiga de Bernardo, também baixou o jogo no **mesmo dia que ele**. No primeiro dia ela capturou as esferas 2, 3 e 5 e colocou no seu compartimento **C**, nessa ordem. No segundo dia ela capturou as esferas 1, 4, 7 e 6 e colocou no seu compartimento **D**, nessa ordem. Veja a Figura 3 abaixo:

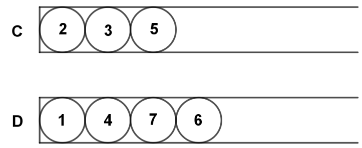
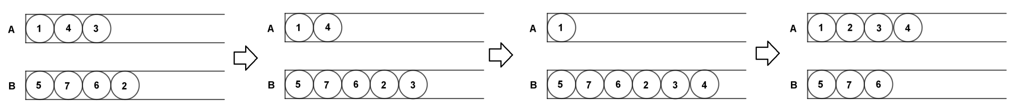


Figura 3: Compartimentos de Bruna

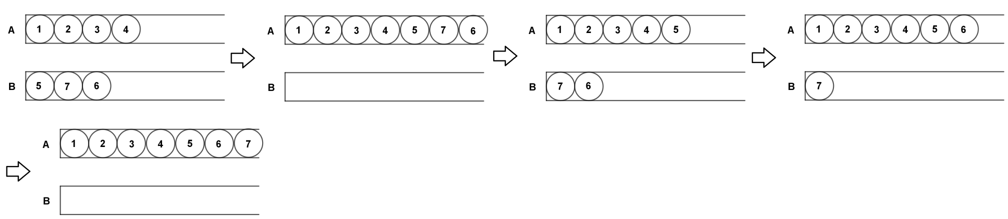
Para Bruna ganhar o jogo ela precisa **colocar todas as sete esferas em ordem crescente, da esquerda para direita** no compartimento **C**. Supondo que Bernardo e Bruna começam a fazer as movimentações **a partir do terceiro dia** e que o jogo deixa fazer **apenas uma movimentação por dia para cada pessoa**, e supondo que Bernardo e Bruna façam o **menor número** de movimentações para ganhar o jogo, quantos dias se passam (desde o primeiro dia) até que alguém ganhe? Quem ganha primeiro?

Solução:

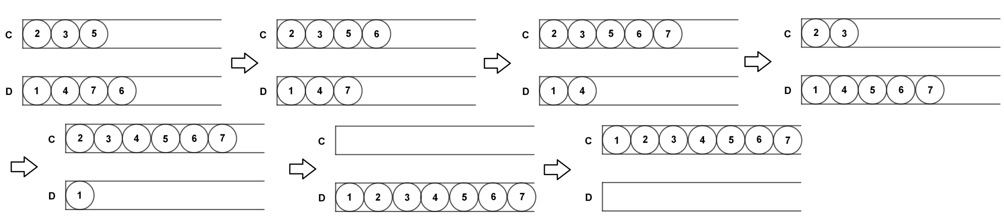
a) Uma possibilidade de movimentos que Bernardo pode fazer está descrita abaixo:



b) Partindo da configuração do item anterior uma possibilidade de movimentos que Bernardo pode fazer para ganhar o jogo está descrita abaixo:



c) O número mínimo de movimentações que Bernardo faz é 7. Já o número mínimo que Bruna tem que fazer é 6. Veja abaixo como Bruna pode ganhar o jogo com 6 movimentações:



Logo Bruna vence o jogo em 8 dias (contando os 6 dias usados para fazer as movimentações mais os dois primeiros dias, usados para capturar as esferas).

2. Na última aula do *POTI*, Pedro aprendeu que **paralelogramos** são **quadriláteros que têm lados opostos de mesmo comprimento** (veja a figura 1 abaixo com alguns exemplos).

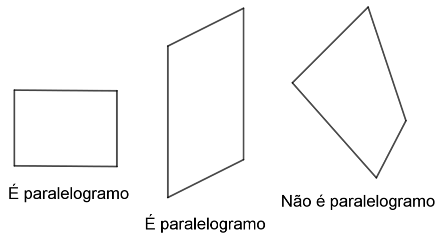


Figura 1: Exemplos

O professor de Pedro mostrou uma propriedade interessante: ao cortar um paralelogramo pela sua **diagonal** se obtém **triângulos de mesma área** (veja Figura 2 abaixo).

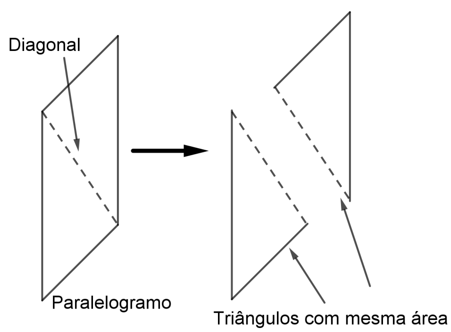


Figura 2: Propriedade interessante

A seguir o professor de Pedro deu uma folha **triangulada** para ele, dividida em vários triângulos **iguais e equiláteros**, isto é, com **todos os lados de mesmo comprimento** (veja a Figura 3 abaixo). O professor ainda disse que todos os triângulos tinham **área igual a 1**.

A tarefa de Pedro foi calcular as áreas das figuras pintadas. Uma dica que o professor deu foi **usar a propriedade** que ele mostrou **das diagonais**.

Sabendo que Pedro acertou todos os valores das áreas das figuras, escreva as respostas que Pedro deu ao seu professor, utilizando a dica dada pelo professor para justificá-las.

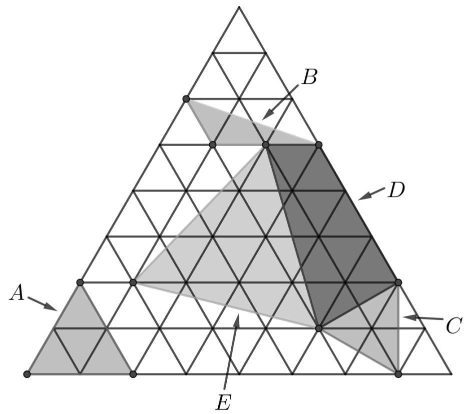


Figura 3: Tarefa de Pedro

a) área da figura A.

b) área da figura B.

c) área da figura C.

d) área da figura D.

e) área da figura E.

Solução:

a) A figura A é composta por quatro triângulos pequenos, logo sua área é igual a 4.

b) A figura B é metade de um paralelogramo formado por quatro triângulos pequenos, logo sua área é igual a 2.

c) A figura C é formada pela metade de três paralelogramos iguais formados por dois triângulos pequenos cada, logo sua área é igual a 3.

d) A figura D é formada por seis triângulos pequenos laterais, mais metade de um paralelogramo formado por dois triângulos pequenos, e mais metade de um paralelogramo formado por seis triângulos pequenos. Portanto sua área é igual a $6 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2}.6 = 10$.

e) A figura E é formada por quatro triângulos internos pequenos e mais metade de três paralelogramos iguais formados por seis triângulos pequenos cada, logo sua área é igual a $4 + 3.\frac{1}{2}.6 = 13$.

3. Conheça a pulga Perninha:

Perninha foi colocada no *Pulatório*, um caminho infinito feito de tapetinhos numerados a partir do 0:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Aqui ela só consegue pular para a direita ou para a esquerda (do ponto de vista de quem está olhando de fora) e do seguinte modo: quando pula **para a direita** se desloca exatamente **5** tapetinhos; quando pula **para a esquerda** se desloca exatamente **3** tapetinhos. Ou, dito de outro modo, caso se desloque para a direita, a diferença entre o número do tapetinho de chegada e o de saída é 5; caso se desloque para a esquerda, a diferença entre o número do tapetinho de saída e o de chegada é 3. Por exemplo, se ela estiver no tapetinho “26” ela pode saltar à direita e chegar no tapetinho “31” (pois $31 - 26 = 5$) ou à esquerda e chegar no tapetinho “23” (pois $26 - 23 = 3$).

a) Perninha foi colocada no tapetinho “0”. Exiba uma possível sequência de saltos que ela pode realizar para chegar no tapetinho “11”.

Depois, **partindo do tapetinho “11”**, exiba uma possível sequência de saltos que ela pode realizar para chegar no tapetinho “2019”.

b) Uma outra pulga, a Anteninha, também está presa no Pulatório, mas ela se move de outro modo: quando pula para a direita se desloca exatamente 2 tapetinhos; quando pula para a esquerda se desloca exatamente 3 tapetinhos. Perninha foi deixada no tapetinho “0” e Anteninha no tapetinho “500”.

O que elas podem fazer para chegar no tapetinho “250” **com a mesma quantidade de pulos**? Qual é a **menor** quantidade de pulos para a qual isso ocorre?

c) Chegou o tão aguardado feriado do Dia Mundial do Número Primo e Perninha resolveu celebrá-lo do seguinte modo: a cada vez que está num tapetinho de número **primo**, dá um pulo **para a direita**, e a cada vez que está num tapetinho de número **não primo**, dá um pulo **para a esquerda**. Mas, lembre-se de como Perninha pula: quando pula para a direita se desloca cinco tapetinhos, quando pula para a esquerda se desloca três tapetinhos. Assim, por exemplo, se neste dia especial ela estiver no tapetinho “17” ela saltará no “22” (pois 17 é primo); se estiver no tapetinho “30” saltará no “27” (pois 30 não é primo).

Se no Dia Mundial do Número Primo Perninha for jogada no tapetinho “13” onde ela estará quando completar o 997 ° salto?

Solução:

a) Uma ideia para Perninha chegar ao tapetinho "11" partindo do "0" é ela saltar para a direita até um tapetinho cujo número, assim como o 11, também dê resto 2 na divisão por 3, e a partir daí começar a pular para a esquerda até chegar no tapetinho "11". Assim, uma possível sequência é: $0 \to 5 \to 10 \to 15 \to 20 \to 17 \to 14 \to 11$.

Agora, para ir do "11" até o "2019", notemos que $2019 - 11 = 2008$ e, dividindo 2008 por 5, obtemos: $2008 = 5 \times 401 + 3$. Assim, partindo do "11", se perninha der 401 saltos para a direita ela vai parar no tapetinho "$11 + 5 \times 401 = 2016$". A partir daqui ela pode saltar para a direita até um tapetinho cujo número, assim como o 2019, também seja múltiplo de 3, e a partir daí começar a pular para a esquerda até chegar no tapetinho "2019": $2016 \to 2021 \to 2026 \to 2031 \to 2028 \to 2025 \to 2022 \to 2019$.

b) Para facilitar a resolução, vamos fazer as seguintes associações: com relação à Perninha (cujo sentido de deslocamento é para a direita, já que deve passar do tapetinho "0" ao "250") "saltar à esquerda" corresponde a "subtrair 3" (-3) e "saltar à direita" corresponde a "somar 5" $(+5)$; com relação à Anteninha (cujo sentido de deslocamento é para a esquerda, já que deve passar do tapetinho "500" ao "250") "saltar à esquerda" corresponde a "somar 3" $(+3)$ e "saltar à direita" corresponde a "subtrair 2" (-2).

Como Anteninha é mais lenta que sua parceira e elas devem chegar ao tapetinho "250" com o mesmo número de saltos, devemos primeiramente descobrir qual número mínimo de saltos que Anteninha precisa dar até chegar ao tapetinho "250" e depois verificar se é possível que Perninha chegue ao tapetinho "250" com a mesma quantidade de saltos encontrada.

Dividindo 250 por 3, temos que: $250 = 83 \times (+3) + 1$. Além disso $1 = 1 \times (+3) + 1 \times (-2)$. Portanto $250 = 83 \times (+3) + 1 \times (+3) + 1 \times (-2)$. Ou seja, a quantidade mínima de saltos pelos quais Anteninha pode chegar ao tapetinho 250 é 85 (onde 84 saltos são para a esquerda e 1 para a direita).

Agora, vejamos se é possível que Perninha chegue ao tapetinho "250" com os mesmos 85 saltos. Devemos encontrar dois números (que devem ser naturais porque indicam a quantidade de saltos), que denotaremos por A e B, tais que $A \times (+5) + B \times (-3) = 250$ e cuja soma resulte em 85. Assim, teremos que $B = 85 - A$ e, portanto,

$$A \times (+5) + (85 - A) \times (-3) = 250 \Rightarrow 5A - 255 + 3A = 250 \Rightarrow A = \frac{505}{8}$$

que não é um número inteiro. Logo, não é possível que Perninha chegue ao tapetinho "250" com exatamente 85 saltos.

Devemos procurar então por um número maior de saltos. Se 85 é a quantidade mínima de saltos pelos quais Anteninha chega ao tapetinho 250, devemos acrescentar a estes 85 a menor quantidade possível de saltos pelos quais Anteninha volte ao mesmo tapetinho "250", isto é, devemos encontrar a menor combinação entre $(+3)$ e (-2) que resulte em zero. Como mdc$(3,2) = 1$, a menor combinação é: $2\times(+3)+3\times(-2) = 0$. Nesse caso, são acrescentados mais 5 saltos, e Anteninha dá agora no total 90 saltos (86 para a esquerda e 4 para a direita).

Analogamente a como fizemos acima, vejamos agora se Perninha pode chegar ao tapetinho “250” com 90 saltos, ou seja, vejamos se existem números naturais A e B tais que $A \times (+5) + B \times (-3) = 250$ e $B = 90 - A$ (pois a soma entre A e B deve resultar em 90). Temos:

$$A \times (+5) + (90 - A) \times (-3) = 250 \Rightarrow 5A + 3A - 270 = 250 \Rightarrow 8A = 520 \Rightarrow A = 65,$$

e assim $B = 25$.

Portanto, as pulguinhas chegarão ao tapetinho “250” com a mesma quantidade de saltos da seguinte maneira:

- Perninha: 65 saltos para a direita e 25 para a esquerda
- Anteninha: 86 saltos para a esquerda e 4 para a direita

Além disso, esta é a combinação pela qual eles dão a menor quantidade de saltos. Logo, a menor quantidade de saltos é 90.

c) Acompanhemos os primeiros saltos de Perninha partindo do tapetinho “13” e seguindo as regras do Dia do Número Primo: $13 \to 18 \to 15 \to (12 \to 9 \to 6 \to 3 \to 8 \to 5 \to 10 \to 7) \to (12 \to 9 \to 6 \to \ldots)$

Quando chega no tapetinho “12”, Perninha entra num ciclo, que vai do “12” até o “7” e que é fechado com 8 saltos. Antes de entrar nesse ciclo, todavia, ela precisou realizar 3 saltos. Assim, para descobrir onde Perninha para no 997° salto, podemos dividir $997 - 3 = 994$ por 8 (o tamanho do ciclo que se repete). Obtemos: $994 = 124 \times 8 + 2$.

Assim, quando Perninha fizer o 995° salto (os 3 saltos iniciais até entrar no ciclo mais os $124 \times 8 = 992$ saltos que completam 124 ciclos) ela completará o último ciclo e, desta maneira, estará no tapetinho “12”. Então, para os dois saltos restantes teremos: $12 \to 9 \to 6$. Portanto, após o 997° salto Perninha estará no tapetinho 6.

4. Leia o diálogo entre os números 13 e 16:

Os números 16 e 13 são **amigos quadráticos**, pois, por um lado, $16^2 = 256$ e $2+5+6 = 13$ e, por outro lado, $13^2 = 169$ e $1+6+9 = 16$. Responda o que se pede justificando as respostas:

a) Os números 17 e 19 são amigos quadráticos?

b) Caso um número seja amigo quadrático de si mesmo, ele é dito **egoísta quadrático**. Por que os números 0 e 1 são egoístas quadráticos? Encontre um outro número (além do 0 e do 1) que seja egoísta quadrático.

c) Caso um número não possua nenhum amigo quadrático e também não seja um egoísta quadrático, ele é dito **solitário quadrático**. Dentre os números naturais, quantos solitários quadráticos existem entre 100 e 999 (incluindo 100 e 999)?

d) Existem também os **colegas quadráticos**. Dois números são colegas quadráticos se a soma dos algarismos do quadrado de um número é igual à soma dos algarismos do quadrado do outro. Por exemplo, os números 4 e 5 são colegas quadráticos porque a soma dos algarismos de $4^2 (= 16)$ é 7 e a soma dos algarismos de $5^2 (= 25)$ também é 7. Os números 13 e 17 são colegas quadráticos?
E os números 508 e $\sqrt{1 + 6060060006 \times 3030030004 - 2020020002 \times 9090090009}$?

e) Beremiz, excepcional matemático que nunca errava as contas, deparou-se com o seguinte número escrito numa parede:

$$811\mathbf{X}7013\mathbf{Y}321512412\mathbf{Z}$$

Os algarismos marcados com **X**, **Y** e **Z** estavam apagados. Para decifrá-los, Beremiz dispunha apenas das seguintes informações:

- Os números **YZX** e **ZYX** não são solitários quadráticos;

- O número **XYZ** é colega quadrático do 12.

Depois de pensar um pouco, Beremiz afirmou: "**Este número na parede é certamente um múltiplo de 30!**" Como é que Beremiz descobriu isso?

Solução:

a) Os números 17 e 19 não são amigos quadráticos. Justificativa: $17^2 = 289$ e $2+8+9 = 19$; porém, $19^2 = 361$ e $3+6+1 = 10 \neq 17$.

b) O número 0 é egoísta quadrático porque $0^2 = 0$ e a soma dos algarismos desse quadrado (no caso, apenas o algarismo 0) é o próprio 0. O número 1 é amigo quadrático de si mesmo porque $1^2 = 1$ e a soma dos algarismos desse quadrado (no caso, apenas o algarismo 1) é o próprio 1.

Além do 0 e do 1, também o número 9 é um egoísta quadrático, pois $9^2 = 81$ e $8+1 = 9$. Na verdade, o 0, o 1 e o 9 são os únicos egoístas quadráticos que existem.

c) Note que $100^2 = 10000$ tem 5 algarismos e $999^2 = 998001$ tem 6 algarismos: assim, o quadrado de qualquer número entre 100 e 999 terá 5 ou 6 algarismos. Desse modo, a soma dos algarismos do quadrado de um número entre 100 e 999 é no máximo $9+9+9+9+9+9 = 54$.

Logo, se um número entre 100 e 999 possuir um amigo quadrático n, então $n \leq 54$. Mas, $54^2 = 2916$, ou seja, possui 4 algarismos. Então, n^2 terá no máximo 4 algarismos e, assim, a soma dos algarismos de n^2 será no máximo $9+9+9+9 = 36 < 100$.

Portanto, nenhum número entre 100 e 999 pode ter amigo quadrático. Logo, existem 900 solitários quadráticos entre 100 e 999 (incluindo 100 e 999).

d) Os números 13 e 17 não são colegas quadráticos. Justificativa: $13^2 = 169$ e $1+6+9 = 16$; $17^2 = 289$ e $2+8+9 = 19$. Logo, a soma dos algarismos do quadrado de 13 é diferente da soma dos algarismos do quadrado de 17.

Para a segunda pergunta temos, por um lado, que: $508^2 = 258064$, e assim, a soma dos algarismos do quadrado de 508 é $2+5+8+6+4 = 25$.

Por outro lado,

$$\begin{gathered}
\sqrt{1 + 6060060006 \times 3030030004 - 2020020002 \times 9090090009}^2 = \\
= 1 + 6060060006 \times 3030030004 - 2020020002 \times 9090090009 = \\
= 1 + 6060060006 \times (3030030003 + 1) - 2020020002 \times 9090090009 = \\
= 1 + 6060060006 \times 303003003 + 6060060006 - 2020020002 \times 9090090009 = \\
= 1 + 6060060006 + 6 \times 3 \times (1010010001)^2 - 2 \times 9 \times (1010010001)^2 = \\
= 6060060007 + 18 \times (1010010001)^2 - 18 \times (1010010001)^2 = \\
= 6060060007
\end{gathered}$$

Logo, a soma dos algarismos do quadrado do número em questão é $6+6+6+7=25$. Portanto, os números da segunda pergunta do enunciado são colegas quadráticos.

e) Em primeiro lugar, vamos descobrir os valores dos algarismos X, Y e Z. Pela primeira informação **YZX** e **ZYX** não são solitários quadráticos. Mas, conforme a resposta ao item *c)*, todos os números entre 100 e 999 são solitários quadráticos: logo, os números **YZX** e **ZYX** não podem estar entre 100 e 999, ou seja, devemos ter que $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} = 0$.

Assim, ainda pela primeira informação, $\mathbf{YZX} = \mathbf{ZYX} = \mathbf{00X} = \mathbf{X}$ não é solitário quadrático. Mas, os únicos números com um algarismo que não são solitários quadráticos são: 0, 1 e 9 (isso pode ser verificado diretamente, testando os números de 0 a 9). Então $\mathbf{X} = 0$, $\mathbf{X} = 1$ ou $\mathbf{X} = 9$. Pela segunda informação, $\mathbf{XYZ} = \mathbf{X}00$ é colega quadrático do 12. Como $12^2 = 144$, devemos ter que a soma dos algarismos de $\mathbf{X}00^2$ é igual a $1+4+4=9$ e, portanto, a única possibilidade que resta é $\mathbf{X} = 9$.

Desse modo, o número que estava escrito na parede era:

$$811\mathbf{9}7013\mathbf{0}3215124\,12\mathbf{0}$$

Como o número termina em 0, então (pelo critério de divisibilidade do 5) ele é múltiplo de 5; e como 0 é par, então (pelo critério de divisibilidade do 2) ele é múltiplo de 2. E como a soma dos seus algarismos $(8+1+1+9+7+0+1+3+0+3+2+1+5+1+2+4+1+2+0=51)$ é múltipla de 3, então (pelo critério de divisibilidade do 3) o número é também múltiplo de 3. Logo, o número em questão é múltiplo de $2 \times 5 \times 3 = 30$.

BOA PROVA!