OPRM 2019 Olimpíada Paranaense de Matemática

1. Polígonos planares são regiões do plano delimitadas por uma linha fechada formada por um número finito de pontos e segmentos de retas entre estes pontos. Os pontos são chamados vértices e os segmentos chamados lados do polígono. Um polígono é dito convexo quando contém todos os segmentos com extremos no próprio polígono. Por exemplo, triângulos são polígonos de três lados, quadriláteros de quatro, pentágonos de cinco, etc. Os ângulos internos são os ângulos em cada vértice formado pelos dois segmentos saindo deste vértice e apontando para dentro da região.

   a) Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?

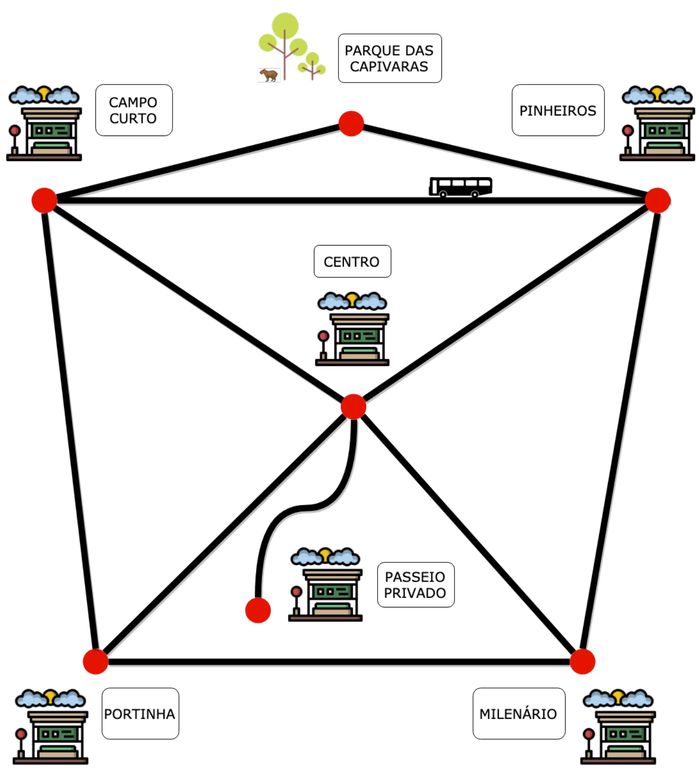
   b) Verifique (com desenhos) que quadriláteros convexos, pentágonos convexos e hexágonos convexos podem ser decompostos em triângulos, formados pelos vértices, que não se intersectam dois a dois. Em quantos triângulos podemos decompor um polígono convexo de n lados?

   c) Qual é a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados?

   d) Num polígono convexo a soma de quaisquer dois ângulos internos consecutivos é menor que $350°$. Qual é o maior número possível de lados desse polígono?

---

2. Thais gosta de andar de ônibus em sua cidade, Marindrina. A rede de transporte público é composta por 7 terminais (Campo Curto, Portinha, Milenário, Pinheiros, Centro, Passeio Privado e Parque das Capivaras), e as linhas de ônibus que as ligam são mostradas abaixo:



Todas as linhas de ônibus da cidade funcionam nos dois sentidos, e se restringem aos terminais adjacentes. Por exemplo, é possível fazer a rota Campo Curto – Parque das Capivaras ou Parque das Capivaras – Campo Curto. Porém, **o número de viagens é contado individualmente**, isto é, no exemplo anterior seriam contabilizadas 2 viagens diferentes. Cada linha ligando os terminais corresponde à uma única linha de ônibus que começa em um nó (terminal) e termina no seguinte. Sabendo disso:

a) De quantas maneiras distintas Thais pode ir de Campo Curto até Milenário, evitando passar pelo centro? Considere que Thais **não pode repetir nem terminais, nem linhas de ônibus**.

b) E obrigatoriamente passando pelo centro?

c) Desta vez, Thais decidiu que irá tentar passear por todas as linhas de ônibus de Marindrina exatamente uma única vez, **podendo repetir terminais para tal**. Explique por que é impossível encontrar tal trajeto, independentemente de onde seja o ponto inicial.

d) Analogamente, argumente porque o dito no item anterior é possível caso Thais escolha não passar pelo Passeio Privado. Conclua apresentando uma rota que satisfaça tal condição.

---

3. Os triângulos são considerados estruturas geometricamente muito estáveis, pois conseguem manter sua forma mesmo com a aplicação de esforços no seu plano, como mostrado na Figura 1.

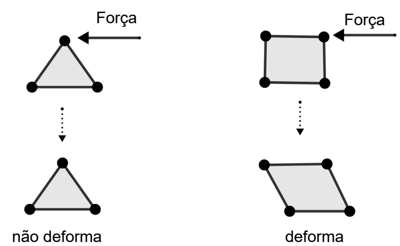


Figura 1: estabilidade de triângulos

Ao agrupar vários triângulos, formamos o que chamamos de treliça (veja a figura 2). Essa estrutura é muito utilizada em telhados de casas.

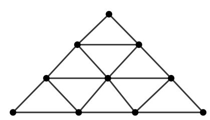


Figura 2: treliça

Na "Vizinhança Triangular" (veja a figura 3), o telhado de toda casa é feito usando uma treliça, que é construída utilizando-se toras de madeira. Considere que os dois segmentos verticais que formam as paredes não contam como toras. Assim, na casa 1 mora uma pessoa e o telhado utiliza 3 toras, na casa 2 moram duas pessoas e foram necessárias 9 toras para a construção do telhado, e assim sucessivamente, seguindo o padrão abaixo (figura 3):

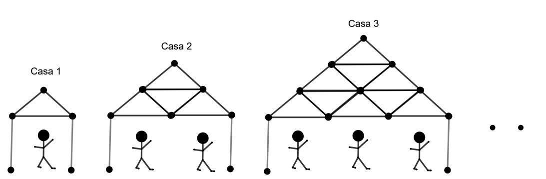


Figura 3: Vizinhança Triangular

Os moradores constroem as casas em ordem crescente (1, 2, 3, ...). Sabendo disso:

a) Quantas toras devem ser compradas para construir o telhado somente da Casa 4?

b) Dê a fórmula geral para quantas toras são necessárias para a construção do telhado somente da casa n.

c) Atualmente na vila moram 276 pessoas. Qual foi a última casa construída?

4. Neste exercício provaremos que os fatores primos de números da forma a^2+1 podem ser escritos como soma de dois quadrados perfeitos. Para dois números inteiros m e n, escrevemos $m|n$ se n é um múltiplo de m.

   a) Seja r um inteiro positivo. Quantos pares de inteiros (m, n) satisfazem $0 \leq m \leq r$ e $0 \leq n \leq r$? (Deixe sua resposta em termos de r).

   b) Sejam p um número primo e r o maior inteiro menor que $\sqrt{p}$. Dado um número a que **NÃO** múltiplo de p, prove que existem dois pares distintos (m_1, n_1) e (m_2, n_2), com $0 \leq m_1, n_1, m_2, n_2 \leq r$, tais que

   $$m_1 + an_1 \quad \text{e} \quad m_2 + an_2$$

   deixam o mesmo resto quando divididos por p.

   c) Conclua que existem u e v inteiros (possivelmente negativos) tais que $p|(u + av)$ e $0 < u^2 < p$ e $0 < v^2 < p$ (*Lema de Thue*).

   d) Se $p|(a^2 + 1)$, prove que $p = u^2 + v^2$. (Dica: $u^2 + v^2 = (a^2 + 1)v^2 + u^2 - a^2v^2$.)

BOA PROVA!