



OPRM 2019

Nível 3

Primeira Fase

14 ou 15 de junho de 2019

Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: _____

Escola: _____

Fiscal: _____

INSTRUÇÕES

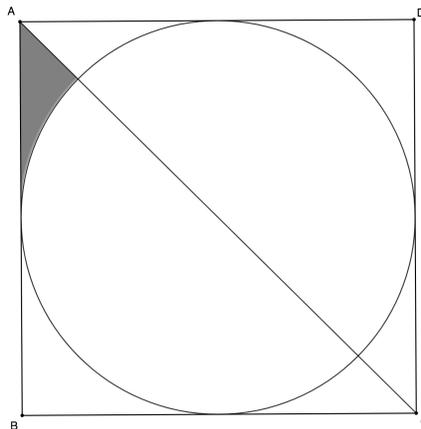
- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 4 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos. Após esse tempo você terá 10 minutos extras para o preenchimento do gabarito oficial.
- Este caderno de questões pode ser usado como rascunho.
- As respostas finais devem ser indicadas na folha de resposta.
- Após o término, entregue ao **FISCAL** este caderno de questões e a folha de respostas toda preenchida.

BOA PROVA!

- Qual é a medida do lado de um triângulo equilátero de altura 2019?
 (A) 2019 (B) 4038 (C) $673\sqrt{3}$ (D) $1346\sqrt{3}$ (E) $2019\sqrt{3}$
- Sejam a e b raízes distintas da função real $f(x) = 2019x^2 + 2019x - 4038$. Qual é o valor de $(a + b)^{2019}$?
 (A) -1 (B) 1 (C) 2^{2019} (D) -2^{2019} (E) -2019^{2019}
- Num quadrado mágico a soma dos valores nas linhas, colunas ou diagonais é sempre o mesmo. Qual é o valor de x no cubo mágico abaixo?

| | | |
|----|-----|----|
| 10 | x | |
| | 7 | 11 |
| 8 | | |

- (A) 2 (B) 6 (C) -3 (D) 5 (E) 8
- Na figura abaixo temos um quadrado cuja diagonal vale 4cm . O valor da área realçada em cm^2 é:



- (A) $1 - \frac{\pi}{64}$ (B) $1 - \frac{\pi}{32}$ (C) $1 - \frac{\pi}{16}$ (D) $1 - \frac{\pi}{8}$ (E) $1 - \frac{\pi}{4}$
- Considere a seguinte disposição de números. O número 9 está na segunda linha e na primeira coluna. O número 36 está na primeira linha e na quarta coluna. O número 2019 está na i -ésima linha e na j -ésima coluna. Qual é o valor de $i + j$?

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|-----|
| 3 | 16 | 19 | 36 | 43 | 64 | 75 | ... |
| 9 | 10 | 25 | 30 | 49 | 58 | 81 | ... |

- (A) 42 (B) 43 (C) 44 (D) 45 (E) 46
- Uma urna contém 2020 bolinhas numeradas de 1 a 2020. Uma bolinha é sorteada. Qual é a probabilidade da bolinha sorteada ter um número com todos os seus algarismos ímpares?

- (A) $\frac{14}{101}$ (B) $\frac{31}{101}$ (C) $\frac{37}{101}$ (D) $\frac{31}{404}$ (E) $\frac{37}{404}$

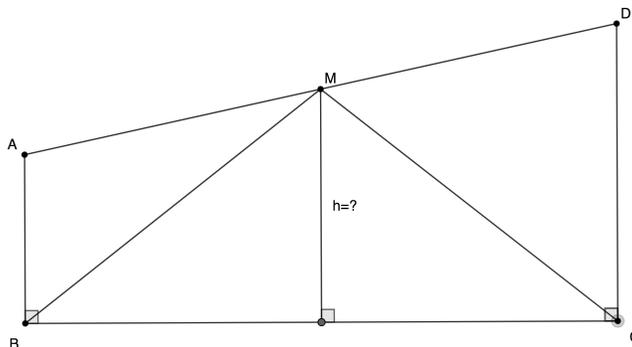
7. Uma função real satisfaz

$$xf(10-x) - f(x) = x^2 - 5.$$

Quanto vale $f(1)$?

- (A) -9 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 9

8. No trapézio retângulo $ABCD$ abaixo, escolhe-se M sobre AD de modo que o triângulo BMC seja isósceles com $BM = MC$. Sabendo que $AB = 3$ e $DC = 6$, qual o valor da altura do triângulo BMC com relação ao lado BC ?



- (A) 3 (B) $3,5$ (C) 4 (D) $4,5$ (E) 5

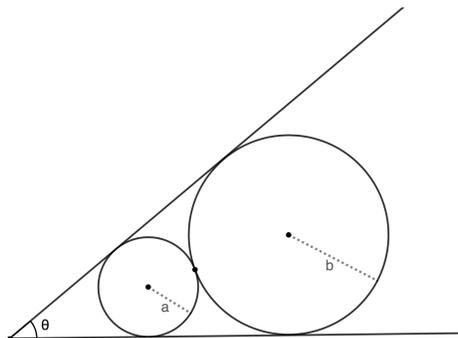
9. Seja w uma raiz de $x^{2019} - 1 = 0$, tal que $w \neq 1$. O valor de $w + w^2 + w^3 + \dots + w^{2018} + w^{2019}$ é:

- (A) 0 (B) 1 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

10. Zezinho possui uma coleção de tazos. Ele gosta de organizar os tazos em pilhas com a mesma quantidade de tazos. Ele percebeu que se formar pilhas com 4 tazos cada, sobram exatamente 3 tazos. Se ele formar pilhas com 5 tazos cada, sobram exatamente 4 tazos. E, finalmente, se ele formar pilhas com 11 tazos cada, sobram exatamente 5 tazos. Quantos tazos Zezinho possui, sabendo que Zezinho possui menos do que 200 tazos?

- (A) 119 (B) 139 (C) 159 (D) 179 (E) 199

11. Na figura abaixo temos duas retas formando um ângulo θ e um círculo de raio a tangenciando as duas retas. Se $b > a$ é o raio do círculo que tangencia as duas retas e a circunferência de raio a , quanto vale o quociente b/a ?



- (A) $\sin(\theta/2)$ (B) $\frac{1+\sin(\theta/2)}{1-\sin(\theta/2)}$ (C) $\operatorname{tg}(\theta/2)$ (D) $1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)}$ (E) $1 + \cos(\theta)\sin(\theta/2)$

12. A maior potência de 2 que divide $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99 \cdot 100$ é:
(A) 2^{50} (B) 2^{86} (C) 2^{97} (D) 2^{100} (E) 2^{134}
13. Um número de cinco algarismos é dito *zureta* se todos os seus algarismos forem primos e se o produto de seus algarismos for par. Quantos números *zuretas* existem?
(A) 121 (B) 243 (C) 256 (D) 781 (E) 943
14. O número $\lfloor x \rfloor$ denota o menor inteiro que não supera x . Por exemplo, $\lfloor 3,4 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Para quantos inteiros positivos n ,

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = 10 ?$$

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11
15. Seja f a função definida por $f(t) = t + a^t + b^t$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Se $f(1) = 6$ e $f(3) = 93$, quanto vale $f(2)$?
(A) $\frac{53}{3}$ (B) $\frac{67}{3}$ (C) $\frac{89}{3}$ (D) $\frac{95}{3}$ (E) $\frac{87}{2}$
16. Dois triângulos retângulos ABC e ABD têm a mesma hipotenusa AB de comprimento l . Sabendo que o ângulo \widehat{CMD} é de 60° , onde M é o ponto médio da hipotenusa AB , podemos afirmar que o comprimento do segmento CD vale:
(A) $l/3$ (B) $l/2$ (C) $\sqrt{3}l/2$ (D) l (E) $3l/2$
17. Quantos pares de inteiros positivos $a > b > 0$ satisfazem

$$a^2 - b^2 = 2019?$$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
18. De quantas maneiras é possível distribuir 50 bombons iguais entre 5 pessoas, de modo que cada pessoa receba necessariamente pelo menos 7 bombons?
(A) 1365 (B) 3876 (C) 23256 (D) 82251 (E) 316251
19. Qual o valor da soma: $\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{4^2-1} + \cdots + \frac{2}{18^2-1} + \frac{2}{19^2-1}$?
(A) $\frac{531}{380}$ (B) $\frac{423}{380}$ (C) $\frac{187}{19}$ (D) $\frac{54}{19}$ (E) $\frac{27}{19}$
20. O número 6^{2019} está escrito em um quadro negro. Calculamos a soma de seus algarismos, depois a soma dos algarismos do resultado e assim por diante, até obtermos um único algarismo. Qual é esse algarismo?
(A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9