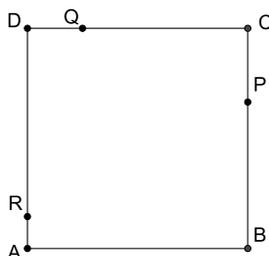
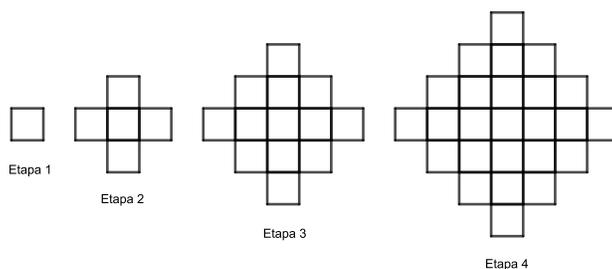


1. O quadrado  $ABCD$  abaixo tem área  $144\text{ cm}^2$  e seus lados satisfazem  $BC = 3PC$ ,  $CD = 4DQ$  e  $AD = 5AR$  (notação: dados dois pontos  $X$  e  $Y$ , denotamos a medida do segmento que liga  $X$  à  $Y$  por  $XY$ ).



Responda o que se pede, justificando todas as respostas:

- (a) Qual é a área do triângulo  $QCP$ ?
  - (b) Qual é a área do quadrilátero  $RPBA$  ?
  - (c) Qual é a área do triângulo  $QPR$  ?
- 
2. Sendo  $n \geq 1$  um número natural, definimos o *fatorial* de  $n$  (notação:  $n!$ ) como sendo o produto de todos os números naturais entre  $n$  e 1, isto é,  $n! = n \cdot (n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Se  $n = 0$ , definimos  $0! = 1$ . Por exemplo,  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ,  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ . Seja  $a = 20! - 18!$  e faça o que se pede justificando:
- (a) Quantos divisores pares tem o número  $a$  ?
  - (b) Quantos divisores ímpares tem  $a$  ?
- 
3. Usando quadrados de lado 1 formam-se as figuras abaixo em cada etapa, seguindo o padrão do desenho. Determine a última etapa na qual se utilizam menos de 2018 quadrados.



4. Sendo  $n \geq k \geq 0$  dois números naturais, definimos a *combinação de  $n$  com  $k$*  (notação:  $\binom{n}{k}$ ) como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{veja exercício 2. acima}).$$

Por exemplo,

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = 10, \quad \binom{5}{0} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!.0!} = 1$$

Responda o que se pede, justificando todas as respostas:

- Mostre que  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  para todos naturais  $n \geq k \geq 1$ .
- Explique por que  $\binom{n}{k}$  é sempre um número natural.
- Calcule o máximo divisor comum dos números  $\binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \binom{10}{3}, \dots, \binom{10}{9}$ .
- Calcule o máximo divisor comum em função de  $n$  das combinações abaixo

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \dots, \binom{2n}{2n-1}.$$

5. Um número natural é chamado de *espelhado* se lendo ele da direita para esquerda, ou da esquerda para a direita, dá o mesmo. Por exemplo, 2772 e 39493 são espelhados; já 1231 não é espelhado. Marcelo escolheu dois números espelhados  $N_1$  e  $N_2$  de 4 dígitos cada. Somando estes números, para seu espanto, obteve um número  $S$  de 5 dígitos que é espelhado. Responda o que se pede justificando:
- Encontre qual deve ser o dígito das unidades do número  $S$ .
  - Quais são todas as possibilidades para o número  $S$ ?
  - Para cada caso encontrado no item b), encontre todos os possíveis valores de  $N_1$  e  $N_2$  que Marcelo escolheu.

6. Um matemático reformou a parede de sua casa com ladrilhos. A parede é quadrada e foi reformada colocando  $21 \times 21$  (21 filas horizontais e 21 filas verticais) ladrilhos quadrados. O matemático usou ladrilhos de diversos modelos respeitando a seguinte regra:

- Cada fila (linha ou coluna) da parede possui no máximo 6 ladrilhos de modelos diferentes.

Responda o que se pede justificando

- Para cada fila horizontal, a quantidade total de ladrilhos que aparecem pelo menos duas vezes é no mínimo 16.
- Para cada fila horizontal, a quantidade total de ladrilhos que aparecem pelo menos três vezes é no mínimo 11.
- Prove que existe uma modelo de ladrilho que aparece na parede do matemático em três filas horizontais e três filas verticais.

OPRM 2018  
2a Fase  
Nível 2  
01/09/18  
Duração: 4 Horas

---



**BOA PROVA!**