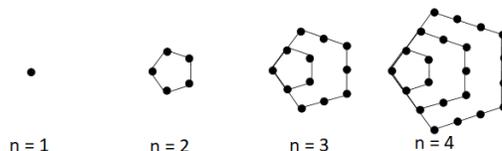


1. “Números pentagonais”, $P(n)$, são números que são dados pelas quantidades de bolinhas na seguinte sequência de pentágonos



Os quatro primeiros números pentagonais são $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P(3) = 12$ e $P(4) = 22$. Faça o que se pede:

- Encontre $P(2018) - P(2017)$
- Calcule $P(100)$.
- “Números triangulares” são números da forma $T(m) = \frac{1}{2}m(m+1)$ onde m é um inteiro positivo. Mostre que todo número pentagonal é um terço de um número triangular.

2. Pintam-se os números naturais de verde ou azul de modo que:

- A soma de um verde e um azul é azul;
- O produto de um verde e um azul é verde.

Quantas formas existem de pintar os números naturais com estas regras, de modo que o número 462 seja azul e o número 2016 seja verde?

3. Ana, Beto e Carolina vão participar do programa de televisão “Descubra a cor do seu chapéu”. No programa, eles se posicionam em roda e sobre a cabeça de cada um será colocado um chapéu azul ou verde. Cada um pode ver os chapéus dos outros, mas não a cor do seu próprio chapéu. Em seguida, cada um deles escreve em um papel uma dentre três opções “azul”, “verde” ou “passo”. Se todos os que escreverem cores “azul” ou “verde” acertarem a cor do seu chapéu, eles ganham um carro 0 km. Se algum deles chutar a cor do chapéu, “azul” ou “verde”, e errar, os três perdem. Se todos eles escreverem “passo”, então os três também perdem. Vale ressaltar que eles não podem combinar sinais e não podem ver os papéis dos outros participantes. Os três se reúnem para tentar combinar uma estratégia. Carolina começa falando: “Nenhum de nós deve escrever “passo”, devemos chutar entre “azul” e “verde”, pois se todos passarmos perderemos”. Beto reage dizendo: “Discordo, melhor apenas Ana chutar a cor do seu chapéu, enquanto eu e Carolina escrevemos “passo”. Neste caso, a chance de ganhar será maior”. Ana se pronuncia: “Tive uma ideia, se usarmos a minha estratégia teremos a probabilidade de $\frac{3}{4}$ de ganhar o carro.” Responda o que se pede

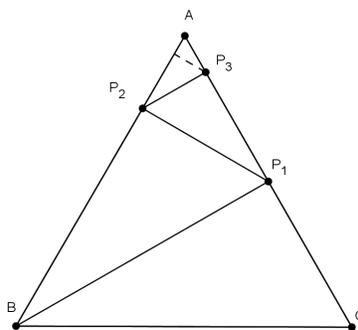
- Seguindo a ideia de Carolina, qual a probabilidade de ganhar o carro?
- Mudando para a ideia de Beto, qual passa a ser a probabilidade de ganhar o carro?
- Dê um exemplo da possível estratégia de Ana que faz a probabilidade de ganhar o carro ser $\frac{3}{4}$.

4. Seja $f(n)$ uma função satisfazendo as três condições abaixo para todo número inteiro n :

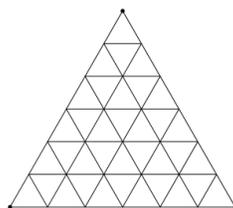
1. $f(n)$ é um número inteiro;
2. $f(n + 1) > f(n)$;
3. $f(f(n)) = 3n$.

Calcule $f(2017)$.

5. Sabe-se que o triângulo ABC (ver figura abaixo) é equilátero, que $AB = 1$, BP_1 é perpendicular a AC , P_1P_2 é perpendicular a AB , P_2P_3 perpendicular a AC , P_3P_4 perpendicular a AB , etc. Determine o limite da soma: $BP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots + P_nP_{n+1}$, quando n tende ao infinito.



6. A planta estrutural de um museu de matemática tem formato de um triângulo equilátero. Dentro deste museu existem 36 salas de exibição que também são em formato de triângulos equiláteros (veja figura abaixo). Cada sala tem uma passagem para a sala adjacente.



Faça o que se pede:

- a) Explique porque um visitante do museu só conseguirá visitar 31 salas no máximo se planejar passar apenas uma vez em cada sala.
- b) Sendo k um número inteiro Suponha que a planta possua k^2 salas triangulares ao invés de 36. Se um visitante do museu quiser visitar apenas uma vez cada sala, qual é o número máximo de salas que ele consegue visitar? Escreva a resposta em termos de k .

BOA PROVA!