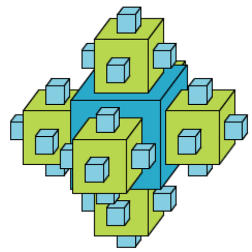
1. Sofia colou, em cada face de um cubo com $5cm$ de lado, um cubo de lado $3cm$. Em cada face livre dos cubos de lado $3cm$ colou um cubo com $1cm$ de lado. Depois pintou o sólido resultante como se indica na figura. Qual é a área total pintada?



Solução:

O Cubo maior tem área pintada $= 6 \times 5^2 - 6 \times 3^2$ (a seis faces pintadas de azul, menos as faces verdes que está colada aos cubos verdes) $= 6 \times (5^2 - 3^2) = 96cm^2$ (I) **(5 pontos)**.

Cada cubo verde têm área pintada $= 5 \times 3^2 - 5 \times 1^2 = 5 \times (3^2 - 1^2) = 40cm^2$. Logo, para os 6 cubos verdes, temos área pintada $= 6 \times 40 = 240cm^2$ (II) **(5 pontos)**.

Cada cubo azul pequeno tem área pintada de $5cm^2$. Como são $5 \times 6 = 30$ cubinhos azuis, temos área pintada $= 30 \times 5 = 150cm^2$ (III) **(5 pontos)**.

Logo a área total pintada é $= (I) + (II) + (III) = 96 + 240 + 150 = 486cm^2$ **(5 pontos)**.

2. Em um certo ano bissexto (isto é, um ano que tem 366 dias) o número de sábados foi maior do que o número de domingos. Em que dia da semana caiu o dia 20 de Janeiro do ano mencionado?

Solução:

O número de semanas que o dado ano terá é dado pelo quociente da divisão de 366 por 7. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, o ano terá 52 semanas e dois dias. **(5 pontos)**

Podemos então considerar apenas se há algum sábado ou domingo nos dois primeiros dias do ano, pois em cada uma das semanas subsequentes há um sábado e um domingo. Observamos que:

1. Se 01/01 for um sábado, 02/01 será domingo e por isso haverá exatamente 53 sábados e 53 domingos no ano.
2. Se 02/01 for um sábado, haverá exatamente 53 sábados e 52 domingos.
3. Se nem 01/01 nem 02/01 for sábado, então haverá exatamente 52 sábados no ano e o número de domingos será 52 ou 53, dependendo de o dia 01/01 ser domingo ou não. **(10 pontos)**

Sendo assim, para garantir que o número de sábados deste ano será maior que o número de domingos, devemos ter um sábado no dia 02/01. Mas então, os dias 09/01 e 16/01 também serão sábados e portanto o dia 20/01 cairá na quarta-feira. **(5 pontos)**

3. Em um salão de jogos existem quatro máquinas de video-game: A, B, C e D. As máquinas A e C pedem 2 fichas por jogo e as máquinas B e D pedem 1 ficha por jogo. Ralph gastou 24 fichas; jogou um total de 15 vezes e ao menos uma vez em cada máquina. Determine de quantas maneiras distintas pode ter jogado Ralph? Descreva todas as possibilidades.

Solução:

Vamos supor que nas máquinas que gastam 2 fichas, Ralph jogou x vezes, e nas máquinas que gastam 1 ficha apenas, Ralph jogou y vezes. Agora vamos montar as equações:

- Ralph jogou 15 vezes no total então $x + y = 15 \Leftrightarrow y = 15 - x$ (I).
- Ralph gastou 24 fichas no total então $2x + y = 24$ (II).

Substituindo o valor de y da equação (I) na equação (II), teremos: $2x + (15 - x) = 24 \Leftrightarrow 2x - x + 15 = 24 \Leftrightarrow x = 24 - 15 \Leftrightarrow x = 9$.

Ou seja, Ralph jogará 9 vezes em máquinas que pedem 2 fichas e 6 vezes $(= 15 - 9)$ em máquinas que pedem apenas 1 ficha para jogar **(5 pontos)**.

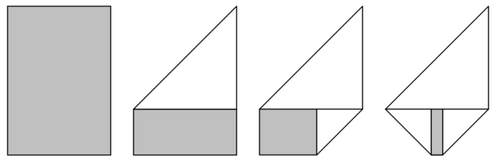
Como as máquinas que pedem 2 fichas podem ser tanto a máquina A como a máquina C, e tenho de jogar pelo menos 1 vez em cada uma delas, as possibilidades de Ralph jogar as 9 vezes nelas é dado pela tabela abaixo. A mesma coisa para as máquinas B e D, ambas pedem apenas 1 ficha, e devo jogar 6 vezes nelas, sendo que pelo menos 1 vez em cada uma delas:

2 Fichas	
A	**C**
8	1
7	2
6	3
5	4
4	5
3	6
2	7
1	8
8 possibilidades	

1 Ficha	
B	**D**
5	1
4	2
3	3
2	4
1	5
5 possibilidades	

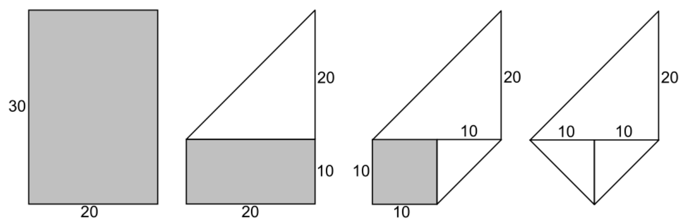
Logo há 8 possibilidades entre escolher as máquinas A e C, e tenho 5 possibilidades para escolha entre as máquinas B e D **(5 pontos)**. Pelo princípio multiplicativo poderia fazer isto de $8 \times 5 = 40$ maneiras diferentes **(10 pontos)** combinando as possibilidades da tabela acima.

4. Uma folha de papel retangular de lados $30cm$ e $20cm$, tem um lado branco e outro cinza. A folha foi dobrada três vezes como mostra a figura abaixo. Que fração da área da folha representa a área sombreada que ficou exposta depois das três dobras?



Solução:

De acordo com a figura abaixo, representando as sequências de dobra efetuadas temos que não sobra nenhuma região cinza (**6 pontos para a primeira passagem e 7 para as demais**). Portanto a fração pedida é zero.



5. De que modo é possível retirar exatamente 6 litros de água de um rio se apenas dispomos, para medir o volume a água, de dois baldes com 4 litros e 9 litros de capacidade?

Solução:

Há uma ambiguidade no enunciado pois é possível interpretar de duas maneiras:

I. **Existe 1 balde de 4 litros e 1 balde de 9 litros.**

II. **Existem 2 baldes de 4 litros e 2 baldes de 9 litros.**

Sendo assim será computada a questão para quem supos um dos casos acima e conseguiu desenvolver o raciocínio.

Para o caso **I.** em cada passo abaixo representaremos a solução usando pares (x, y) de números onde x é a quantidade de água no balde maior (9 litros) e y é a quantidade de água no balde menor (4 litros).

1. Enchemos o balde maior com água do rio. Ele fica com 9 litros de água. Ficamos com $(9, 0)$.
2. Com essa água do maior enchemos o menor, ou seja, passamos 4 litros do maior para o menor. O maior fica com 5 litros e o menor com 4 litros. Ficamos com $(5, 4)$.
3. Jogamos no rio a água do menor. Ficamos com $(5, 0)$.
4. Com os 5 litros que estão no balde maior, enchemos novamente o menor. O balde maior fica com 1 litro, e o menor com 4 litros. Ficamos com $(1, 4)$.
5. Jogamos no rio outra vez a água do menor. Ficamos com $(1, 0)$.
6. Passamos 1 litro de água que restou no balde maior para o menor, Ficamos com $(0, 1)$.
7. Enchemos novamente o balde maior com 9 litros de água do rio. Ficamos com $(9, 1)$.
8. Com essa água do maior completamos o balde menor. Com isso passamos 3 litros do balde maior para o menor e ele fica então com 6 litros. Ficamos com $(6, 4)$.
9. Só para completar, jogamos novamente no rio a água do menor. Ficamos com $(6, 0)$. (**20 pontos**)

Para o caso **II.**, em cada passo abaixo representaremos a solução usando quádruplas (x, y, z, w) de números onde x, y é a quantidade de água em cada balde maior (9 litros) e z, w é a quantidade de água em cada balde menor (4 litros).

1. Enchemos os dois baldes maiores. Ficamos ao todo com 18 litros de água. Temos $(9, 9, 0, 0)$
2. Com a água dos dois maiores passamos para os dois menores e ficamos com $(5, 5, 4, 4)$.

3. Jogamos fora a água dos dois menores. Ficamos com $(5, 5, 0, 0)$.
4. Pegamos um dos baldes maiores e enchemos um dos menores ficamos com $(1, 5, 4, 0)$.
5. Jogamos fora a água do balde menor cheio e ficamos com $(1, 5, 0, 0)$ obtendo assim 6 litros de água no total. (**20 pontos**)

6. O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

   i. Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?

   ii. O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

   iii. O último ano palíndromo primo aconteceu há mais de 1000 anos, em 929. Determine qual será o próximo ano palíndromo primo.

Solução:

i. Depois de 2002 os próximos quatro anos palíndromos serão 2112, 2222, 2332 e 2442 **(5 pontos)**.

ii. Depois do ano 1991, o próximo palíndromo ímpar é 3003 **(5 pontos)**.

iii. Perceba que todo número palíndromo de 4 dígitos é múltiplo de 11. De fato se o número $ABBA$ é palíndromo com $A \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $B \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ então a soma dos dígitos de posição ímpar é $A+B$ e a soma dos dígitos na posição par é $B+A$. Logo a diferença das duas somas é $A + B - (B + A) = 0$, que é múltiplo de 11. Portanto $ABBA$ é múltiplo de 11 (Na verdade todo palíndromo com número par de dígitos será múltiplo de 11, pelo mesmo motivo que os de 4 dígitos o são $\Leftarrow$ Soma dos dígitos de posição ímpar $-$ Soma dos dígitos de posição par $= 0$). Com isso nosso palíndromo primo deve ter 5 dígitos e ser ímpar. Os próximos candidatos maiores que 2.002 são: 10.001, 10.101, 10.201 e 10.301 **(5 pontos)**.

   Fica fácil perceber que 10.101 é múltiplo de 3, uma vez que a soma de seus algarismos é múltiplo de 3. Sabemos que 100×100 é igual a 10.000 e 101×101 é igual a 10.201. Então podemos descartar também o palíndromo 10.201. Para verificar se 10.001 é primo precisamos testar se ele é divisível por todos os primos até 100; ou seja, testar a divisibilidade pelos números do conjunto

   $$P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97\}.$$

   Até o no 11 fica fácil ver que 10.001 não é divisível por nenhum primo (basta aplicar os critérios de divisibilidade), depois podemos efetuar as divisões um a um e descobriremos que 10.001 é múltiplo de 73. Isto mesmo, $10.001 = 73 \times 137$. Como 10.301 é menor que $10.404 = 102 \times 102$, para ver se é primo basta testar a divisibilidade de 10.301 entre todos os primos do conjunto P acima e mais o primo 101. Ao fazer isto veremos que 10.301 não é divisível por nenhum deles, logo é o número primo palíndromo que procuramos **(5 pontos)**.