



OPRM 2016

Nível 3

Segunda Fase

24/09/16

Duração: 4 Horas e 30 minutos

Nome: _____

Escola: _____

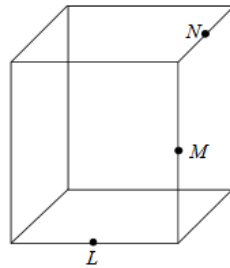
Aplicador(a): _____

INSTRUÇÕES

- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **APLICADOR(A)** nos campos acima.
- Esta prova contém 7 páginas (incluindo esta página de capa) e 30 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo peça ao **APLICADOR(A)** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos. Após esse tempo você terá 10 minutos extras para o preenchimento do gabarito oficial.
- Após o término do preenchimento, entregue ao **APLICADOR(A)** o gabarito oficial com as respostas.
- Esta prova não precisa ser entregue ao **APLICADOR(A)**.

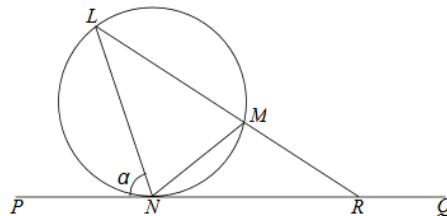
BOA PROVA!

1. Os pontos L , M e N são pontos médios de arestas do cubo, como mostra a figura abaixo. Quanto mede o ângulo $\angle LMN$?



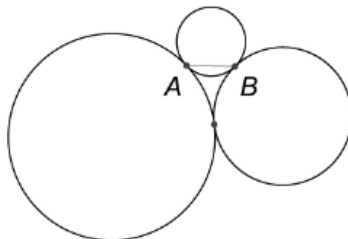
- (A) 90 (B) 105 (C) 120 (D) 135 (E) 150

2. Na figura, a reta PQ toca em N o círculo que passa por L , M e N . A reta LM corta a reta PQ em R . Se $LM = LN$ e a medida do ângulo $\angle PNL$ é α , $\alpha > 60$, quanto mede o ângulo $\angle LRP$?



- (A) $3\alpha - 180^\circ$ (B) $180^\circ - 2\alpha$ (C) $180^\circ - \alpha$ (D) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (E) α

3. Em um trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2cm . Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é:
- (A) 12 (B) 11 (C) 10 (D) 9 (E) 8
4. A figura mostra três circunferências de raios 1, 2 e 3, tangentes duas a duas nos pontos destacados. Qual é o comprimento do segmento AB ?



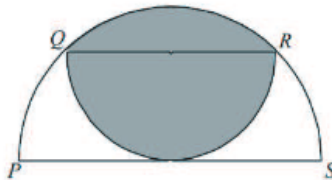
- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{3}$

5. Para um inteiro positivo n considere a função

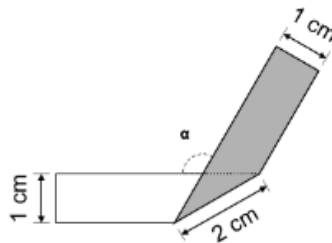
$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}}$$

Calcule o valor de $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$

- (A) 64 (B) 213 (C) 214 (D) 364 (E) 428
6. Na figura temos dois semicírculos de diâmetros PS , de medida 4, e QR , paralelo a PS . Além disso, o semicírculo menor é tangente a PS em O . Qual é o valor da área destacada?



- (A) $\pi - 1$ (B) $\pi - 2$ (C) $2\pi - 2$ (D) $2\pi - 3$ (E) 2π
7. Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura abaixo. Qual é a medida do ângulo α ?



- (A) 110° (B) 115° (C) 120° (D) 125° (E) 130°
8. **(QUESTÃO ANULADA. Motivo: faltou especificar que os algarismos que Tiago escreveu são todos distintos. Dessa forma não há nenhuma alternativa correta)**
Tiago escreve todos os números de quatro dígitos tais que os algarismos destes números são não nulos e possuem a mesma paridade. Qual a probabilidade de que, ao escolhermos um desses números que Tiago escreveu, ele seja par?
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$
9. Se 3 e $\frac{1}{3}$ são as raízes da equação $ax^2 - 6x + c = 0$, qual o valor de $a + c$?
- (A) 1 (B) 0 (C) $-\frac{9}{5}$ (D) $\frac{18}{5}$ (E) -5
10. O número $2^{48} - 1$ é divisível por dois números compreendidos entre 60 e 70. Quais são esses números?

- (A) 61 e 63 (B) 61 e 65 (C) 63 e 65 (D) 63 e 67 (E) 67 e 69
11. Quantos zeros existem no final do número $9^{2016} - 1$?
 (A) Nenhum (B) Um (C) Dois (D) Três (E) Quatro
12. Sofia foi levar uns docinhos para sua avó; são 7 docinhos de amora, 6 de coco e 3 de chocolate. Durante o caminho, a gulosa Sofia come 2 docinhos. Qual das situações abaixo é possível?
 (A) Vovó não recebeu docinhos de chocolate.
 (B) Vovó recebeu menos docinhos de coco do que de chocolate.
 (C) Vovó recebeu o mesmo número de docinhos de cada uma das 3 variedades.
 (D) Existem 2 variedades de docinhos das quais vovó recebeu o mesmo número.
 (E) O número de docinhos de amora que vovó recebeu é maior que o dos outros 2 somados.
13. Uma moeda viciada, quando jogada 5 vezes, dá a mesma probabilidade de obter cara exatamente uma vez e de obter cara exatamente duas vezes. A probabilidade de obter cara é diferente de zero. A probabilidade de a moeda dar cara 3 vezes em 5 lançamentos é
 (A) $\frac{20}{243}$ (B) $\frac{5}{32}$ (C) $\frac{40}{243}$ (D) $\frac{7}{32}$ (E) $\frac{5}{16}$
14. Na terra *Brasilis*, há 100 senadores, cada um com 4 auxiliares. Os senadores e os auxiliares participam de comissões. Uma comissão tem 5 senadores, ou 4 senadores e 4 auxiliares, ou 2 senadores e 12 auxiliares. Cada senador está em 5 comissões e cada auxiliar está em 3 comissões. Quantas são as comissões?
 (A) 100 (B) 120 (C) 140 (D) 160 (E) 200
15. O número complexo

$$z = \frac{1 - \cos a}{\sin a \cos a} + i \frac{1 - 2 \cos a + 2 \sin a}{\sin 2a}, \quad a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

tem argumento $\frac{\pi}{4}$. Assim, o valor de a é:

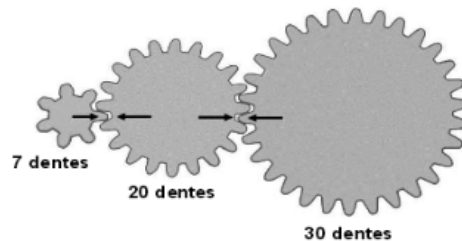
- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{5}$ (E) $\frac{\pi}{9}$
16. No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) $\frac{3}{2}$
17. Calcule

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{10}$$
 (A) $\frac{210 + 10\sqrt{5}}{4}$ (B) $\frac{210 - 10\sqrt{5}}{2}$ (C) 76 (D) 123 (E) 199
18. Uma escada de $25m$ está encostada na parede vertical de um edifício, de forma que o pé de escada está a $7m$ da base do prédio. Se o topo da escada escorrega $4m$, quanto o pé da escada escorregará?
 (A) 6 (B) 7 (C) 4 (D) 5 (E) 8

19. Se um triângulo tem lados 3, 7 e 8; podemos afirmar sobre este triângulo.

- (A) Uma das alturas é inteira
- (B) A área é um número racional
- (C) Todos os ângulos internos do triângulo são agudos
- (D) Os ângulos deste triângulo formam uma P.A.
- (E) Não podemos afirmar nenhuma das alternativas acima.

20. Qual é o número mínimo de voltas completas que a menor das engrenagens deve realizar para obtermos a mesma foto da figura abaixo?



- (A) 14 voltas (B) 21 voltas (C) 57 voltas (D) 60 voltas (E) 30 voltas

21. A soma

$$S = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$$

é igual a:

- (A) $\binom{n+2}{0}$ (B) $\binom{2n}{n}$ (C) $\frac{n}{2} \binom{6n}{2n}$ (D) $\binom{n+2}{n}^2$ (E) $\binom{n+1}{n}^2$

22. Ludmilson descobriu hoje que o produto da idade que tinha há 55 anos atrás pela idade que terá daqui a 55 anos é igual ao cubo de um número primo. Podemos dizer da idade atual de Ludmilson:

- (A) Que é um número primo
- (B) Que tem mais de 70 anos
- (C) Que é um múltiplo de 6
- (D) Que é divisível por 13
- (E) Desde que nasceu já se passaram mais de 18 Copas do Mundo

23. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m - 15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, então m pode assumir quantos valores?

- (A) 6 (B) 7 (C) 4 (D) 2 (E) 3

24. No meu carro, uma marca particular de pneu dura 40.000 quilômetros se utilizado na frente ou 60.000 quilômetros se utilizado atrás. Intercambiando os pneus traseiros e dianteiros, a maior distância que posso andar a partir de um conjunto de quatro pneus novos é:

- (A) 52.000 (B) 50.000 (C) 48.000 (D) 40.000 (E) 44.000

25. Um quadrado de área 54 é dividido em quatro quadrados iguais. O quadrado superior esquerdo é de cor cinza; a parte inferior direita do quadrado é de novo dividida em quatro quadrados iguais, e assim por diante. O padrão continua indefinidamente (infinitas vezes). Qual é a área total da área cinzenta do quadrado?

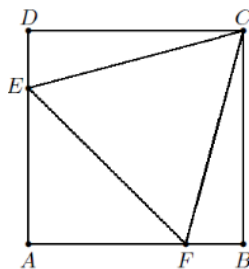


- (A) 15 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 27
26. Quantos triângulos retângulos não congruentes existem de lados com medidas inteiras tais que a área tem valor numérico igual ao do perímetro?
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) Nenhum
27. O valor de

$$\sum_{n=1}^{100} n \cdot 2^n$$

é igual a:

- (A) $99 \cdot 2^{101} - 1$ (B) $100 \cdot 2^{100}$ (C) $99 \cdot 2^{101}$ (D) $99 \cdot 2^{101} + 2$ (E) $99 \cdot 2^{101} + 1$
28. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado e CEF é um triângulo equilátero. Considerando que a área do triângulo equilátero CEF é igual a $\sqrt{3}$ metros quadrados, determine a área do quadrado.



- (A) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{5 - \sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{3} + 2$ (D) 4 (E) 3
29. (QUESTÃO ANULADA. Motivo: a alternativa correta era o item b). Porém faltou o sinal de raiz quadrada na valor do número 6. Sendo assim não há alternativa correta.) Usando a figura do problema 28) anterior, ou por qualquer outro meio, podemos dizer que $\sin 15^\circ$ é
- (A) $\frac{6 + \sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{6 - \sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

30. Quantos pares $(x; y)$ com x e y inteiros são soluções da equação $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4