



OPRM 2022
Olimpíada Paranaense
de Matemática

OPRM 2022

Nível 3

Primeira Fase

03 e 04 de junho de 2022

Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: _____

Escola: _____

Fiscal: _____

INSTRUÇÕES

- Escreva o seu nome, o nome da sua escola e o nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 4 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou algum problema faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta a qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Este caderno de questões pode ser usado como rascunho.
- As respostas finais devem ser marcadas **com cuidado** no gabarito.
- Ao finalizar a prova, entregue ao **FISCAL** este caderno de questões e o gabarito preenchido.

BOA PROVA!

- Se o volume de um cubo é de 9261 cm^3 , então a aresta deste cubo mede:
(A) 21 cm (B) 49 cm (C) 343 cm (D) 1029 cm (E) 3087 cm
- Os quatro números 22, 12, 90 e n possuem média aritmética igual a $n + 1$. O valor de n é:
(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 40 (E) 48
- Manoel desenvolveu as contas da expressão $10^{22} - 22$ e obteve um certo número. Qual é a soma de todos os algarismos do número obtido por Manoel?
(A) 186 (B) 195 (C) 204 (D) 213 (E) 222
- O valor de $\cos(15^\circ)$ é:
(A) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$
- Um relógio tem seus ponteiros desregulados. Ambos os ponteiros marcam inicialmente 12h00, e com o passar do tempo ambos giram com velocidade constante no sentido horário. Contudo, decorridos 60 minutos, o ponteiro dos minutos aponta para 11, enquanto o ponteiro das horas aponta para 2, sendo que nenhum dos ponteiros completou nenhuma volta. Se os dois ponteiros partem juntos da marcação de 12h00, após quantos minutos eles voltam a se encontrar?
(A) 1 hora e 12 minutos (B) 1 hora e 20 minutos (C) 1 hora e 24 minutos
(D) 1 hora e 30 minutos (E) 1 hora e 40 minutos
- Um quadrado cujo lado mede 1 metro está inscrito em uma circunferência de centro O . Sendo P um dos vértices desse quadrado, qual a área formada pela interseção entre o círculo centrado em O que circunscreve o quadrado e o círculo centrado em P de raio 1 m?
(A) $\frac{\pi - 1}{4} \text{ m}^2$ (B) $\frac{\pi + 1}{4} \text{ m}^2$ (C) $\frac{\pi - 1}{2} \text{ m}^2$ (D) $\frac{2\pi - 1}{4} \text{ m}^2$ (E) $\frac{\pi + 1}{2} \text{ m}^2$
- Em quantos anagramas da palavra PARANAENSE as letras P e R não aparecem juntas?
(A) 15.120 (B) 30.240 (C) 60.480 (D) 120.960 (E) 2.903.040
- Se $x + y + z = 7$, $xyz = 5$ e $xy + xz + yz = 17$, então o valor de $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$ é:
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7
- Em um restaurante, foram reservados lugares para 10 pessoas, sendo elas:
 - duas famílias com 3 integrantes cada;
 - um casal;
 - dois amigos.Esses lugares foram divididos em duas fileiras de 5 cadeiras de lados opostos da mesa. De quantas maneiras essas pessoas podem ocupar os lugares à mesa de modo que cada família ocupe cadeiras adjacentes e o casal permaneça lado a lado?
(A) 432 (B) 864 (C) 1728 (D) 3456 (E) 4320
- Sabendo que a e c são números reais positivos tais que 22 é a solução única da equação de segundo grau $ax^2 - 2x + c = 0$, determine $a + c$.
(A) $\frac{969}{22}$ (B) $\frac{485}{22}$ (C) $\frac{243}{22}$ (D) $\frac{61}{11}$ (E) $\frac{1}{22}$

11. Qual é o resto da divisão de 3^{2022} por 7?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

12. Os números x_1, x_2 e x_3 são as raízes distintas do polinômio $p(x) = x^3 - 33x^2 + 342x - 1080$. O valor de

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

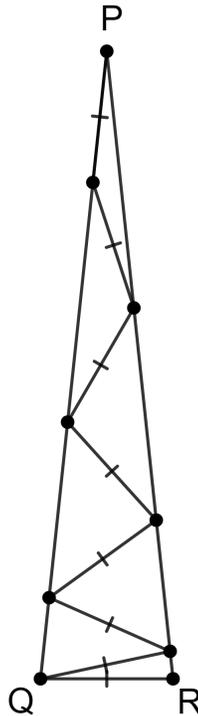
é:

- (A) $\frac{11}{360}$ (B) $\frac{19}{360}$ (C) $\frac{11}{114}$ (D) $\frac{11}{60}$ (E) $\frac{19}{60}$

13. Qual é o menor inteiro positivo n tal que $\frac{n}{6}$ é quadrado perfeito e $\frac{n}{20}$ é cubo perfeito?

- (A) 240.000 (B) 270.000 (C) 540.000 (D) 2.160.000 (E) 34.560.000

14. No triângulo abaixo, todos os oito segmentos marcados têm a mesma medida.



Sabendo que ΔPQR é um triângulo isósceles, o valor do ângulo $\angle QPR$ é:

- (A) 12° (B) 15° (C) 18° (D) 20° (E) 22°

15. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função dos naturais nos naturais tal que $f(0) = 0$, e para $n > 0$, $f(n) = n$ se $f(n-1) = 0$ e $f(n) = f(n-1) - 1$ caso contrário. Quanto vale $f(2022)$?

- (A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 26 (E) 30

16. Qual destes números é o maior?

- (A) 9^{31} (B) 15^{23} (C) 28^{21} (D) 77^{15} (E) 126^{12}

17. Pedro e Paulo apostam qual lado da moeda cairá um total de 10 vezes primeiro após sucessivos lançamentos. Feitos alguns lançamentos, 7 vezes o resultado foi cara e 6 vezes o resultado foi coroa. Qual é a probabilidade de que a aposta seja decidida no máximo nos quatro lances seguintes?
- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{5}{16}$ (E) $\frac{3}{8}$
18. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabendo que $a_{2022} = 8$, então o valor de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é:
- (A) 2^{2021} (B) 2^{2022} (C) 2^{2023} (D) 2^{2024} (E) 2^{2025}
19. Carlos estava estudando o conteúdo de funções. Lendo o livro de matemática, ele aprendeu que uma função $f : A \rightarrow B$ é dita sobrejetora se para todo $y \in B$ existir um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Carlos então listou todas as funções $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Quantas destas funções são sobrejetoras?
- (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 18 (E) 27
20. O máximo divisor comum de $12! \cdot 34!$ e $19! \cdot 22!$ é:
- (A) $12! \cdot 19!$ (B) $16! \cdot 22!$ (C) $17! \cdot 22!$ (D) $18! \cdot 22!$ (E) $19! \cdot 22!$